計測自動制御学会論文集
Vol.36, No.9, 766/772（2000）

マルチレートフィードフォワード制御を用いた完全追従制御法†

藤本博志*・堀　洋一*・河村篤男**

Perfect Tracking Control Method Based on Multirate Feedforward Control

Hiroshi FUJIMOTO*, Yoichi HORI* and Atsuo KAWAMURA**

In this paper, a novel perfect tracking control method based on the multirate sampling control is proposed, in which the concept of the two-degree-of-freedom preview control is employed. In the proposed method, it is assumed that the usual single-rate robust feedback controller such as the disturbance observer or the H_∞ controller already exists, and only the feedforward controller is designed by using the multirate sampling control. The advantages of the proposed method are that 1) the controller can be designed without considering the unstable zeros of the discrete-time plant, 2) the states of the plant match the desired trajectories at every sampling point, 3) high robust performance is assured by the robust feedback controller.

An illustrative example of position control using a servo motor is presented, and the advantages of this approach are demonstrated.

Key Words: multirate sampling, digital control, feedforward control, preview control, motion control

1. はじめに

サーボシステムでは，制御対象を他の点へ途中経路を指定せずに移動させるPTP制御と，与えた経路に沿って移動させる追従制御(Tracking Control)が存在する．誤差なく目標軌道に追従する制御系を，完全追従制御[1]という．

完全追従制御系は，次式に示すように閉ループ伝達関数$G_{cl}[z]$の逆システムをフィードフォワード制御器$C_1[z]$とし，dステップ将来の目標軌道を入力することにより実現できることが知られている．

$$C_1[z] = \frac{1}{z^d G_{cl}[z]} \tag{1}$$

ここに，dは$G_{cl}[z]$の相対次数である．

しかしながら，線形連続時間プラントを，零次ホールドを用いて短いサンプリング周期で離散化した場合に，パルス伝達関数に不安定零点を生じる[2]．フィードバック制御では，零点を動かすことはできないので，このプラントの不安定零点は，閉ループ系の不安定零点となる．よって逆システムが不安定となるので，零次ホールドを用いた従来の制御方式では，内部安定性を保証することができず，完全追従制御は実現不可能といえる[1]．

そこで，文献1)では，目標値$y_d[i]$から出力$y[i]$までの伝達特性を完全に1とすることをあきらめ，以下の2つの追従制御法を提案している．まず，安定極零相殺(Stable Pole Zero Cancelling: SPZC)による追従制御器は，フィードフォワード制御器により，閉ループ系の全ての極と，安定な零点のみを相殺する．さらに，零位相誤差追従制御器(Zero Phase Error Tracking Controller: ZPETC)は，SPZC法の制御器に，さらに位相誤差を零にする要素を付け加えたものである．しかしながら，ZPETC法においても，相殺できない不安定零点により，ゲイン特性に追従誤差を生じることが知られている．

さらに文献3)〜6)では，このゲイン特性の追従誤差を補償するよう，様々な試みがなされたが，零次ホールドを仮定しているため，やはり完全追従は達成し得なかった．そこで本稿では，線形時不変の連続時間制御対象に対して，2自由度制御型のマルチレートフィードフォワード制御を導入すれば，ロバストな完全追従制御が実現できることを明らかにする．

離散時間制御対象の不安定零点問題は，一般化ホールド法[7]や2-Delay入力制御[8]を用いれば，制御対象の零点を任意に配置できるので，解決できることが従来から明らかにされていた．しかしながら，文献9)は，この入力多重型マルチレートサンプリング制御による零点配置法は，制御入力が加速と減速を繰り返す振動的なものになり，サンプル点間応答が劣化する危険性を指摘している．実際，文献7)の手法を入力多重型マルチレート制御として実現して，零点を安定な位置に配置し，式(1)によりその逆システムをフィードフォワード制御器として完全追従制御系を構成すると，マル

† IFAC World Congress で一部発表(1999・7)

* 東京大学工学系研究科 文京区本郷 7–3–1
** 横浜国立大学工学部 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-5
* University of Tokyo, Tokyo
** Yokohama National University, Yokohama

（Received September 13, 1999）
（Revised June 5, 2000）

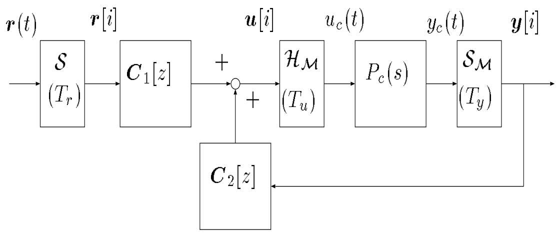


Fig. 1　Two-degree-of-freedom control system.

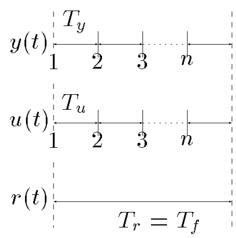


Fig. 2　Multirate feedforward control

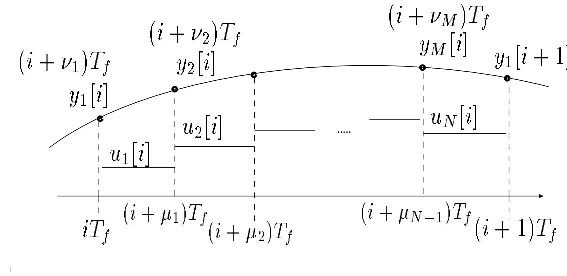


Fig. 3　Generalized multirate sampling control

チレート制御入力が振動的になることが分かっている[10]．これに対して提案する手法は，制御対象の出力変数だけではなく，全状態変数に対して目標軌道を与えることを特徴とし，これにより連続的な制御入力を生成することができると考えられる．

また近年，サンプル値制御理論が発展し，サンプル点間応答を直接的に考慮に入れることができる設計が可能となった[11),12)]．これに対して，提案する手法は，サンプル点上での完全追従のみを保証する手法であるが，設計が単純で見通しがよく，最適化の計算をする必要がないという実用的な長所を持つ．また，本手法では，制御対象の全状態変数に対して目標軌道を与えるので，出力変数の目標軌道の微分情報を与えるということになり，これに対して完全な追従を保証するので，サンプル点間応答が大きく劣化するという問題点は起こりにくいと考えられる．

2.　完全追従制御系の設計

本節では，フィードバック制御器 $C_2[z]$ がすでに設計されているとして，完全追従制御を達成するマルチレートフィードフォワード制御器 $C_1[z]$ の設計法を提案する．制御対象 $P_c(s)$ は単入出力系と仮定するが，多入出力系に関しては,13) と同様な定式化を行なえば，以下の手法と並行した議論により容易に拡張できる．

ディジタル制御における追従制御系では，**Fig. 1** に示すように，参照値 $r(t)$ 及び出力 $y(t)$ の２つのサンプラと制御入力 $u(t)$ のホールダが存在し，それぞれの周期を T_r, T_y, T_u とすると，合計３つの時間周期が混在することになる．本稿では，入出力の周期が等しい $(T_y = T_u)$ 通常のディジタル制御系に対して，**Fig. 2** に示すような $T_r = nT_u$ とするマルチレートフィードフォワード制御を適用し，時刻 T_r ごとに制御対象の全状態が目標軌道に完全に誤差なく追従する完全追従制御系を提案する．ここに，n は制御対象 $P_c(s)$ の次数である．

実際のディジタル制御系では，ハードウェアの制限により，入出力の周期を等しくできない $(T_y \neq T_u)$ 場合も数多く存在する．提案する手法は，このような制御対象にも適用することが可能であることをすでに示しているが[14)]，簡単のため本稿では $T_y = T_u$ の場合に限って説明を行なう．

本稿では，長いサンプリング周期 T_r をフレーム周期 T_f と定義し[15)]，T_f ごとの遷移で離散時間系を定式化する．また，$z \triangleq e^{sT_f}, z_s \triangleq e^{sT_y} = e^{sT_f/n}$ と定義する．

2.1　制御対象の離散化とパラメトリゼーション

単入出力 n 次の連続時間制御対象

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A_c x}(t) + \boldsymbol{b_c} u(t)\ ,\quad y(t) = \boldsymbol{c}_c \boldsymbol{x}(t) \tag{2}$$

に対して，T_f の間に制御入力を N 回切換える，**Fig. 3** のマルチレートサンプリング制御を適用する．離散化された制御対象の状態方程式は，$\boldsymbol{x}[i] = \boldsymbol{x}(iT_f)$ と書くと，

$$\boldsymbol{x}[i{+}1] = \boldsymbol{Ax}[i] + \boldsymbol{Bu}[i]\ ,\ \boldsymbol{y}[i] = \boldsymbol{Cx}[i] + \boldsymbol{Du}[i] \tag{3}$$

として定式化できる．ただし，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}$ の定義は次式による．

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{array}\right] \triangleq \left[\begin{array}{c|ccc} e^{\boldsymbol{A_c}T_f} & \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_N \\ \hline \boldsymbol{c}_1 & d_{11} & \cdots & d_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{c}_M & d_{M1} & \cdots & d_{MN} \end{array}\right] \tag{4}$$

$$\boldsymbol{u} \triangleq [u_1, \cdots, u_N]^T,\ \boldsymbol{y} \triangleq [y_1, \cdots, y_M]^T \tag{5}$$

$$\boldsymbol{b_j} \triangleq \int_{(1-\mu_j)T_f}^{(1-\mu_{(j-1)})T_f} e^{\boldsymbol{A_c}\tau} \boldsymbol{b_c} d\tau\ ,\ \boldsymbol{c}_k \triangleq \boldsymbol{c_c} e^{\boldsymbol{A_c}\nu_k T_f} \tag{6}$$

$$d_{kj} \triangleq \begin{cases} \mu_j < \nu_k : & \boldsymbol{c}_c \int_{(\nu_k-\mu_j)T_f}^{(\nu_k-\mu_{(j-1)})T_f} e^{\boldsymbol{A_c}\tau} \boldsymbol{b_c} d\tau \\ \mu_{(j-1)} < \nu_k \le \mu_j : & \boldsymbol{c_c} \int_0^{(\nu_k-\mu_{(j-1)})T_f} e^{\boldsymbol{A_c}\tau} \boldsymbol{b_c} d\tau \\ \nu_k \le \mu_{(j-1)} : & 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_N = 1 \tag{8}$$

$$0 \le \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_M < 1 \tag{9}$$

ここに $\mu_j (j = 0, 1, \cdots, N), \nu_k (k = 1, \cdots, M)$ は Fig. 3 で定義されるマルチレートのパラメータである．本論文で仮定す

るFig. 2の場合は，入力多重度 N 及び出力多重度 M は制御対象の次数と選び$(N=M=n)$，入出力信号はT_fを等分割するので，$\mu_j=j/N, \nu_k=(k-1)/M$となる(注1).

ここで，Fig. 1に示す2自由度フィードバック制御系を考える．Fig. 1の$\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$はマルチレートホールド，$\mathcal{S}_{(\mathcal{M})}$は(マルチレート)サンプラであり，その動作はFig. 3に示すとおりである．一般に理想的な追従制御系では，目標値rから出力yまでの伝達特性G_{yr}が1である．本稿では，制御対象の状態の目標軌道$\boldsymbol{x}_d$から状態$\boldsymbol{x}$への伝達特性が$\boldsymbol{I}$となるようなフィードフォワード制御器$\boldsymbol{C}_1[z]$を設計する問題を考察する．

2.2 フィードバック制御器$C_2[z]$の設計

完全追従制御$\boldsymbol{C}_1[z]$を設計する前に，まず$\boldsymbol{C}_2[z]$を設計しておくが，その条件は，感度関数$\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}_2)^{-1}$を十分小さくするロバスト制御器である必要がある．この理由は，Fig. 1において，$\boldsymbol{P}$の変動に対する目標値応答特性の変動が，感度関数$\boldsymbol{S}$となるからである[16].

ここで，フィードバック制御器もマルチレートとすることが考えられる．しかしながら，本稿で扱う$T_y=T_u$の場合においては，外乱抑圧やロバスト安定性といったフィードバック特性は，マルチレート制御器を用いても改善されることがないことが知られている[17]．したがって，フィードバック制御器はシングルレート制御器で十分であるといえる．ただし，$\boldsymbol{C}_1[z]$は周期T_fのマルチレート制御器であるので，$\boldsymbol{C}_1[z]$と$\boldsymbol{C}_2[z]$を合わせて実現するためには，設計された周期$T_y(=T_u)$のシングルレートフィードバック制御器$C_{2s}[z_s]$を，周期T_fに変換する必要がある．$P_c(s)$に対して設計された，シングルレートのロバスト制御器を$C_{2s}[z_s]=\{\boldsymbol{A}_s,\boldsymbol{b}_s,\boldsymbol{c}_s,d_s\}$とするとき，$T_f$で動作する$\boldsymbol{C}_2[z]$に書き換えるためには，次式を実現すれば良い[12].

$$\boldsymbol{C}_2[z]=\left[\begin{array}{c|ccccc}\boldsymbol{A}_s^n & \boldsymbol{A}_s^{n-1}\boldsymbol{b}_s & \boldsymbol{A}_s^{n-2}\boldsymbol{b}_s & \cdots & \boldsymbol{b}_s \\ \hline \boldsymbol{c}_s & d_s & 0 & \cdots & 0 \\ \boldsymbol{c}_s\boldsymbol{A}_s & \boldsymbol{c}_s\boldsymbol{b}_s & d_s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \boldsymbol{c}_s\boldsymbol{A}_s^{n-1} & \boldsymbol{c}_s\boldsymbol{A}_s^{n-2}\boldsymbol{b}_s & \boldsymbol{c}_s\boldsymbol{A}_s^{n-3}\boldsymbol{b}_s & \cdots & d_s\end{array}\right] \tag{10}$$

2.3 完全追従制御器$C_1[z]$の設計

本節では，T_rごとに入力される目標軌道に対して，誤差なく追従する完全追従制御器$\boldsymbol{C}_1[z]$の設計を行なう．

Fig. 1の制御系の制御則は，自由パラメータ$\boldsymbol{K},\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{RH}_\infty$を用いて，

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{r}+\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{y} \tag{11}$$

$$= \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{K}\boldsymbol{r} \tag{12}$$

と表すことができるので，Fig. 1は**Fig. 4**の形に変換することができる(付録A参照).

(注1) この場合には，周期$T_y(=T_u=T_f/n)$で離散化した制御対象を$P[z_s]=\{\boldsymbol{A}_s,\boldsymbol{b}_s,\boldsymbol{c}_s,d_s\}$とするとき，式(3)で表される周期$T_f$の制御対象$\boldsymbol{P}[z]$は，式(4)〜式(7)を計算する代わりに，式(10)の右辺と同じ計算をすることにより簡単に得ることができる．

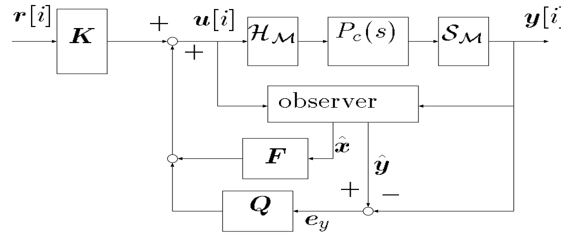


Fig. 4 Basic structure of TDOF control.

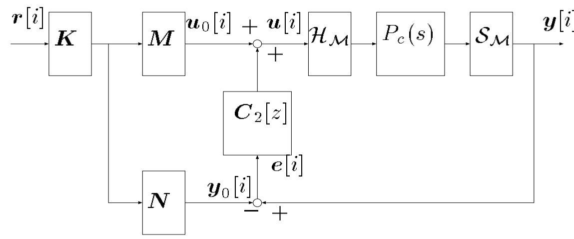


Fig. 5 Implementation of the proposed controller.

ここで，制御対象がノミナルであるとすると，オブザーバの推定誤差は零$(\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_y=\hat{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{y}=0)$であるので，式(3)の制御対象に，式(12)なる制御則を施したシステムは次式となる．

$$\boldsymbol{x}[i+1]=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{F})\boldsymbol{x}[i]+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{r}[i] \tag{13}$$

ここで，入力多重度を制御対象の次数nと選んでいるため，$\boldsymbol{B}$は正則となる[18]．よって，

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{O}\ ,\quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}=\boldsymbol{I} \tag{14}$$

となるように，$\boldsymbol{F},\boldsymbol{K}$を次式のように選ぶことができる．

$$\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\ ,\quad \boldsymbol{K}=\boldsymbol{B}^{-1} \tag{15}$$

このとき，式(13)は，

$$\boldsymbol{x}[i+1]=\boldsymbol{r}[i] \tag{16}$$

となるので，状態の目標値を$\boldsymbol{x}_d[i]$とするとき，将来の目標値を使って，参照入力を$\boldsymbol{r}[i]=\boldsymbol{x}_d[i+1]$と与えれば，式(16)は$\boldsymbol{x}[i]=\boldsymbol{x}_d[i]$となり$T_r$ごとの完全追従制御が達成される．提案手法では，入力多重型マルチレート制御と全状態変数への目標軌道を導入したことが特徴的であるが，これは正則な$\boldsymbol{B}$を得て，式(15)のような簡単な式で完全追従$(\boldsymbol{x}[i]=\boldsymbol{x}_d[i])$を達成するのが目的であり，零点の安定性に関して議論をする必要性がないという長所をもつ．

ここで，式(11)は式(17)に変形することができるので(付録B参照)，制御系は**Fig. 5**で表される．制御器の実装は，式(15),(18)を式(17)に代入して，最小実現すればよい．

$$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{N})\boldsymbol{K}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{y} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= \left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{F} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{F} & \boldsymbol{I}\end{array}\right]=\boldsymbol{I}+z^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{N} &= \left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{F} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{F} & \boldsymbol{D}\end{array}\right]=\boldsymbol{D}+z^{-1}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{F})\boldsymbol{B}\end{aligned} \tag{18}$$

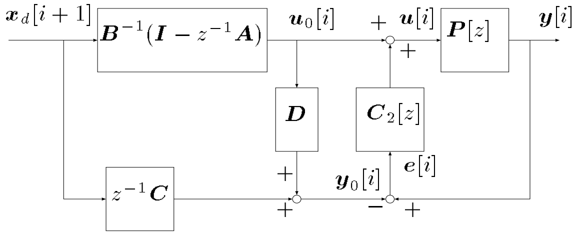


Fig. 6　Structure of the proposed controller.

ここに，M, N は式(3)の制御対象の右既約分解 $P[z] = NM^{-1}$ である．また，式(18)で表される制御器の状態変数の初期値は，制御対象の初期値 $x[0]$ と等しく選ぶものとする．

式(14)から，提案する制御系はフィードフォワード制御器にデッドビート特性を持たせ，フィードバック制御器にロバスト補償器を用いるというロバストデッドビート制御器[19]と同様の構造を持っていることがわかる．しかしながら，従来のデッドビート制御系は，ステップやランプなど，あるタイプの目標軌道に対して，数ステップで整定させる問題を考えているのに対し，本論文では，任意の目標軌道に対して遅れなく追従する問題を考えている点が異なり，そのため予見動作や目標軌道のサンプラ，さらにはマルチレートフィードフォワードという概念を導入しているのである．

2.4　完全追従制御器 $C_1[z]$ の構造

本節では，提案する完全追従制御器 $C_1[z]$ が非常に見通しのよい構造を持つことを示す．Fig. 5の２つのフィードフォワードパス MK, NK は，式(15)，式(18)より次式で表される．

$$MK = B^{-1}(I - z^{-1}A) \tag{19}$$

$$NK = z^{-1}C + DB^{-1}(I - z^{-1}A) \tag{20}$$

一方，式(3)で表される制御対象の離散時間状態方程式及び出力方程式から，次式が得られる．

$$u[i] = B^{-1}(I - z^{-1}A)\, x[i+1] \tag{21}$$

$$y[i] = z^{-1}C\, x[i+1] + D\, u[i] \tag{22}$$

式(19)及び式(21)から，MK は $x[i+1]$ から $u[i]$ までの伝達関数に等しく，安定な逆システムを表していることがわかる．また，式(21)を式(22)に代入すると式(20)の右辺に一致するので，NK は $x[i+1]$ から $y[i]$ までの伝達関数に等しいことがわかる．以上のことから，提案する完全追従制御器は **Fig. 6** に示す構造を持っていることがわかる．制御対象 $P[z]$ は安定な逆システムにより駆動され，外乱やモデル化誤差により追従誤差 e が生じたときのみ，ロバストなフィードバック補償器が働き，誤差を強力に打ち消すという構成となっている．

3.　シミュレーション及び実験

制御対象として，次式で表される電流制御されたサーボモータを考える．

$$P_c(s) = \frac{K}{Js^2} \tag{23}$$

上式を零次ホールドを用いてサンプリング周期 T で離散化すると，

$$P[z] = \frac{T^2 K}{2J} \frac{z+1}{(z-1)^2} \tag{24}$$

と不安定零点 -1 を持つので，第1節で述べたように，シングルレート系では完全追従は不可能であることがわかる．そこで，提案するマルチレートフィードフォワード制御により完全追従制御系を設計する．

目標軌道を式(25)に示すような，周期 $\omega_{ref} = 2\pi \times 4$[rad/s] の正弦波状としたときのシミュレーション及び実験結果を **Figs. 7，8** に示す．

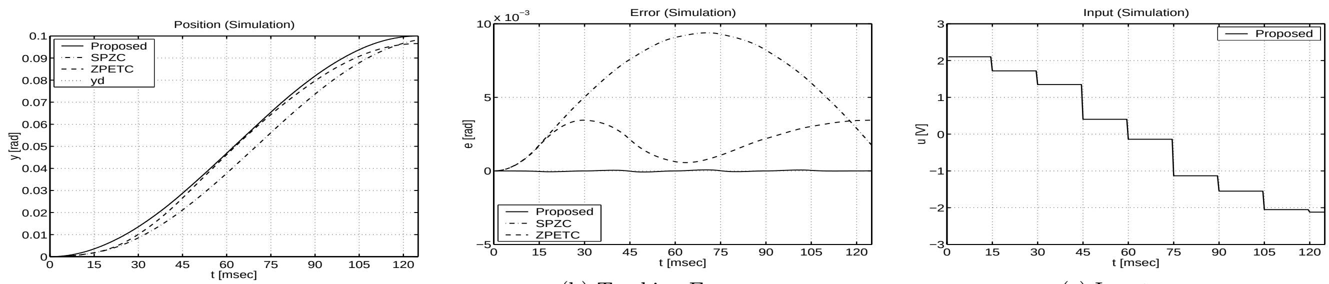
$$\begin{aligned} \theta_d(iT) &= A(1 - \cos(\omega_{ref}\, iT)) \\ \omega_d(iT) &= A\omega_{ref} \sin(\omega_{ref}\, iT) \end{aligned} \tag{25}$$

制御対象は２次系であるので，入力多重度は２となる．ここでは，$T_y = T_u = 15$[ms], $T_r = 30$[ms] と選んだ(注2)．また，フィードバック制御器は，文献[20]の手法により，積分要素をもつ厳密にプロパーな３次の H_∞ 制御器を設計し，Tustin 変換で離散化した．さらに，式(17)により全制御器を設計，最小実現すると合計５次となった．

Figs. 7，8のシミュレーション及び実験では，文献1)の従来型の２つの手法（SPZC法及びZPETC法）と提案する手法を，短い方の制御入力の周期 T_u を等しくして，比較を行なう．よって，シングルレート系であるSPZC法及びZPETC法では，$T_y = T_u = T_r = 15$[ms] となるので，目標値のサンプリング周期 T_r は本手法のほうが２倍に長くなる．それにも関わらず，本手法のほうが追従性能が向上しているという結果を得ていることに注意したい．また，目標軌道の予見ステップ数は，提案手法とSPZC法は１ステップであるが，ZPETC法では，プラントとフィードバック制御器の合計２個の不安定零点を考慮に入れるため，３ステップとなった．

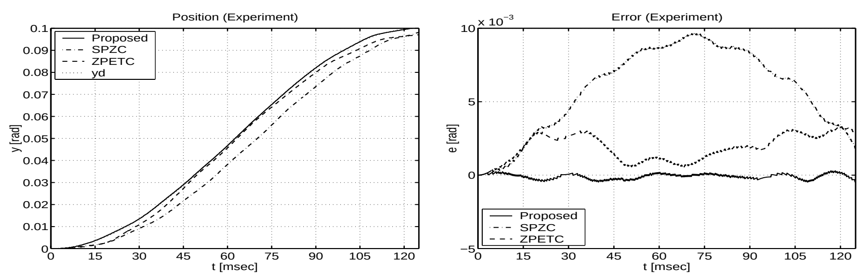
Fig. 7(a)(b)より，従来型の手法では，離散化した制御対象の不安定零点の影響により大きく追従誤差を生じているが，提案する手法では，目標軌道に完全に追従していることがわかる．また，Fig. 7(c)より，提案手法は入力多重型マルチレートサンプリング制御を使っているが，制御入力は連続的で，文献9)が指摘するような制御入力が振動的になる問題は生じていないことがわかる．これは位置の目標軌道だけではなく，その微係数である速度の目標軌道に完全に追従しようとすることで，マルチレート制御入力 u_1, u_2 が冗長度を持たなくなるからであると考えられる．すなわち，速度をも滑らかな軌道軌道に対して追従させようとすると，加速度が連続的である必要があるので，その結果，制御入力も連続的になるのである．さらに，Fig. 8の実験結果においても，演算時

（注2）Fig. 8の実験結果においては，出力信号を15[ms]よりも十分に短い周期で検出し，サンプル点間応答も含めて表示している．各周期を比較的長く設定したのは，追従誤差の比較結果を明確にするためである．



(a) Position (b) Tracking Error (c) Input

Fig. 7 Simulation Results



(a) Position (b) Tracking Error

Fig. 8 Experimental Results

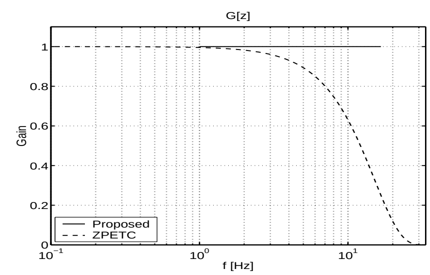


Fig. 9 Frequency response $y[z]/y_d[z]$

間遅れやモデル化誤差の影響で多少誤差は生じてはいるが，従来手法に比べて十分高い精度で目標軌道に追従しているといえる．

Fig. 9に周期 T_r で解析した，目標軌道追従特性 ($y[z]/y_d[z]$) の周波数応答を示す．ZPETC 法は高周波において追従特性のゲインが1から低下しているが，提案手法は完全追従を保証するので，全周波数において追従特性は1である．従って，提案手法は高速な目標軌道に対する追従制御系において，より大きな効果が発揮できることが分かる．

4. 目標軌道設計の指針

提案する手法は，制御対象の出力変数だけではなく全状態変数に目標軌道を与え，これに完全に追従させることにより，連続的な制御入力と滑らかなサンプル点間応答を実現することを特徴とする．本節では，全状態変数に対する目標軌道 $\boldsymbol{x}_d(t)$ が与えられない場合に，ある制御変数に対して与えられた目標軌道 $z_d(t)$ から $\boldsymbol{x}_d(t)$ を安定に設計するための条件と，目標軌道の設計指針を考察する．ここで制御変数 $z(t)$ とは，完全追従を行なわせる制御対象の変数であり，通常は出力変数を選ぶ．

連続時間制御対象 $P_c(s)$ が厳密にプロパーな n 次の単入出力系であるとし，その零点数を $m(<n)$ とする．

$$P_c(s)=\frac{z(s)}{u(s)}=\frac{c_m s^m+c_{m-1}s^{m-1}+\cdots+c_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0} \quad (26)$$

上式を可制御正準系で実現すると次式となる．

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&\cdots&0\\ 0&0&\cdots&0\\ &&\ddots&\\ -a_0&-a_1&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$z(t)=[c_0,\cdots,c_m,0\cdots0]\,\boldsymbol{x}(t)$$

上式から，制御変数の目標軌道 $z_d(t)$ から状態の目標軌道 $\boldsymbol{x}_d(t)$ を求めると，次式を得る．

$$\begin{bmatrix}x_{1d}(s)\\ x_{2d}(s)\\ \vdots\\ x_{nd}(s)\end{bmatrix}=\frac{1}{c_m s^m+\cdots+c_0}\begin{bmatrix}1\\ s\\ \vdots\\ s^{n-1}\end{bmatrix}z_d(s) \quad (27)$$

上式は非プロパーであるが，目標軌道 $z_d(t)$ の微分値が与えられれば計算できる (注3)．従って，式(27)から，$\boldsymbol{x}_d(t)$ を安定に計算するためには，$P_c(s)$ が最小位相系であることが必要であることが分かる．

ここで，式(26)がフィードフォワード制御器を設計するためのモデルであることを考えると，その次数は比較的低く，例えば剛体モードだけをモデル化した簡単なものでも十分であると考えられる．また，制御変数 $z(t)$ の選び方により $P_c(s)$ の零点が変化することや，提案手法はむだ時間系を厳密に取り扱うことができることを考慮すると [22]，連続時間制御対象 $P_c(s)$ が最小位相系であるという仮定は，特に厳し

(注3) $\boldsymbol{x}_d[i]$ を計算機で計算する場合には，$z_d(t)$ を T_r よりも短い周期でサンプリングし，式(27)を数値計算すれば，精度よい近似値を得ることができ，サンプル点間応答が良好になる [21]．

い制限ではないと考えられる．しかしながら，連続時間系で最小位相であった制御対象も，零次ホールドを用いて離散化すると，ほぼ必ず非最小位相系となる[2)]．シングルレート制御で完全追従が不可能であったのは，この離散時間制御対象の不安定零点問題が原因であったことに注意されたい．

また，完全追従制御器には，$\boldsymbol{x}_d(t)$ を周期 T_r でサンプルした信号 $\boldsymbol{x}_d[i]$ を入力するので，$\boldsymbol{x}_d(t)$ の周波数成分がナイキスト周波数 $\frac{1}{2T_r}$ よりも十分に低いものでなければ，サンプル点間応答が連続時間の目標軌道と一致しないことになる．さらに，提案手法は全状態変数の目標軌道に対して，周期 T_r ごとに誤差なく追従するので，$x_{kd}[i]$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ がステップ状の不連続な変化をすると，マルチレートの制御入力が1フレーム周期 $T_f(=T_r)$ の間にbang-bang 入力的に変化して，完全追従を達成しようとする．これを防ぐためには，式(27) から，$z_d(t)$ の $n-1$ 階微分が連続的であればよいことが分かる．

5. 結　　論

本論文では，マルチレートフィードフォワード制御という新しい制御方式を用いて，目標軌道のサンプル点ごとに，制御対象の全状態が誤差なく目標軌道に追従する制御法を提案し，シミュレーション及び実機実験によりその有効性を実証した．提案した手法は，従来通りのシングルレートのロバストフィードバック制御器に，見通しがよく高性能のフィードフォワード制御器を組み合わせるという構成をしているので，産業応用分野への積極的な適用が期待できる[22)]．

サンプル点間応答や制御入力の滑らかさに関する定量的な解析や，それに基づく設計法は，今後の課題としたい．最後に，本研究の一部は文部省科学研究費補助金によって行なわれたことを付記する．

参 考 文 献

1) M. Tomizuka: “Zero phase error tracking algorithm for digital control”, ASME, J. Dynam. Syst., Measur., and Contr., **109**, pp. 65–68 (1987).
2) K. J. Åström, P. Hangander and J. Sternby: “Zeros of sampled system”, Automatica, **20**, 1, pp. 31–38 (1984).
3) B. Haack and M. Tomizuka: “The effect of adding zeros to feedforward controllers”, ASME, J. Dynam. Syst., Measur., and Contr., **113**, pp. 6–10 (1991).
4) D. Torfs, J. D. Schutter and J. Swevers: “Extended bandwidth zero phase error tracking control of nonminimal phase systems”, ASME, J. Dynam. Syst., Measur., and Contr., **114**, pp. 347–351 (1992).
5) E. Gross, M. Tomizuka and W. Messner: “Cancellation of discrete time unstable zeros by feedforward control”, ASME, J. Dynam. Syst., Measur., and Contr., **116**, pp. 33–38 (1994).
6) 舟橋, 山田：“零位相差追従コントローラの一般化”, 計測自動制御学会論文集, **28**, 1, pp. 59–66 (1992).
7) P. T. Kabamba: “Control of linear systems using generalized sampled-data hold functions”, IEEE Trans. Automat. Contr., **32**, 9, pp. 772–783 (1987).
8) 美多, 千田：“多入出力 2-delay ディジタル制御の提案と応用”, 計測自動制御学会論文集, **24**, 5, pp. 467–474 (1988).
9) K. L. Moore, S. P. Bhattacharyya and M. Dahleh: “Capabilities and limitations of multirate control schemes”, Automatica, **29**, 4, pp. 941–951 (1993).
10) H. Fujimoto and A. Kawamura: “Perfect tracking digital motion control based on two-degree-of-freedom multirate feedforward control”, IEEE Int. Workshop Advanced Motion Control, pp. 322–327 (1998).
11) 山本, 荒木, 原, 杉本, 早川, 太田：“特集解説:ディジタル制御技術”, 電学論C, **114**, 7/8, pp. 729–766 (1994).
12) T. Chen and B. Francis: “Optimal Sampled-Data Control Systems”, Springer (1995).
13) 藤本, 河村：“N-delay 制御を用いた新しいディジタル再設計法”, 電学論D, **117**, 5, pp. 645–654 (1997).
14) H. Fujimoto, Y. Hori and A. Kawamura: “High performance perfect tracking control based on multirate feedforward / feedback controllers with generalized sampling periods”, 14th IFAC World Congress, Vol. C, pp. 61–66 (1999).
15) 萩原, 荒木：“時変型ディジタル制御装置”, 計測と制御, **27**, 12, pp. 1071–1077 (1988).
16) 前田, 杉江：“アドバンスト制御のためのシステム制御理論”, 朝倉書店 (1990).
17) J. S. Shamma and M. A. Dahleh: “Time-varying versus time-invariant compensation for rejection of persistent bounded disturbances and robust stabilization”, IEEE Trans. Automat. Contr., **36**, 7, pp. 838–847 (1991).
18) M. Araki and T. Hagiwara: “Pole assignment by multirate-data output feedback”, Int. J. Control, **44**, 6, pp. 1661–1673 (1986).
19) Y. Zhao and H. Kimura: “Two-degrees-of-freedom dead-beat control system with robustness”, Int. J. Control, **48**, 1, pp. 303–315 (1988).
20) 美多, 平田, S. Villas-Boas：“虚軸上に極を持つ制御対象に対する H_∞ サーボ系設計問題 – モーションコントロールのための H_∞ 制御 –”, 電学論D, **115**, 10, pp. 1253–1262 (1995).
21) 藤本：“マルチレートサンプリングによるディジタル制御の新しい枠組の提案とモーションコントロールへの応用”, 横浜国立大学修士論文 (1998).
22) 藤本, 堀, 山口, 中川：“マルチレートサンプリングを用いた完全追従制御法による磁気ディスク装置のシーク制御”, 電学論D, **120**, 10 (2000). (掲載予定).
23) 美多：“H_∞ 制御”, 昭晃堂 (1994).

《付　　録》

A. 式 (12) の証明

本節では，式(12)が式(11)に等しく，Fig. 1はFig. 4の形で表現することができることを示す．1自由度制御系の場合は文献23)で示されているので，ここではそれを2自由度系に拡張する．

$\boldsymbol{P}[z]$ の既約分解表現を次式で表す．

$$\boldsymbol{P}[z] = \boldsymbol{N}\boldsymbol{M}^{-1} = \tilde{\boldsymbol{M}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{N}} \tag{A. 1}$$

閉ループ系を内部安定化する全ての2自由度制御器 $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2$ は，次式でパラメトライズできる[16)]．

$$\boldsymbol{C}_1 = (\tilde{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}})^{-1}\boldsymbol{K}, \tag{A. 2}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_2 &= (\tilde{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}})^{-1}(\tilde{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{M}}) \\ &= (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{N}\boldsymbol{Q})^{-1}\end{aligned} \tag{A. 3}$$

ただし $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{RH}_\infty$ は次式のベズー方程式を満たすものとする．

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{X}} & -\tilde{\boldsymbol{Y}} \\ -\tilde{\boldsymbol{N}} & \tilde{\boldsymbol{M}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{N} & \boldsymbol{X} \end{bmatrix} = \boldsymbol{I} \tag{A.4}$$

上式を満たすパラメータは，次の定理より得ることができる[23]．

《定理 1》 $\boldsymbol{P}[z] = \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$ に対して，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ が可安定，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$ が可検出とする．このとき，$\boldsymbol{A}_F = \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{A}_H = \boldsymbol{A}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{C}$ が安定になるように $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{H}$ を選ぶと，式 (A.1) と 式 (A.4) を満たすパラメータは次式で表される．

$$\boldsymbol{M}[z] = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_F & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{F} & \boldsymbol{I} \end{array}\right],\ \boldsymbol{N}[z] = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_F & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{F} & \boldsymbol{D} \end{array}\right]$$

$$\tilde{\boldsymbol{X}}[z] = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_H & -\boldsymbol{B}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{D} \\ \hline \boldsymbol{F} & \boldsymbol{I} \end{array}\right],\ \tilde{\boldsymbol{Y}}[z] = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_H & -\boldsymbol{H} \\ \hline \boldsymbol{F} & \boldsymbol{O} \end{array}\right]$$

$$\tilde{\boldsymbol{M}}[z] = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_H & \boldsymbol{H} \\ \hline \boldsymbol{C} & \boldsymbol{I} \end{array}\right],\ \tilde{\boldsymbol{N}}[z] = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_H & \boldsymbol{B}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{D} \\ \hline \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{X}[z] = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_F & -\boldsymbol{H} \\ \hline \boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{F} & \boldsymbol{I} \end{array}\right],\ \boldsymbol{Y}[z] = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_F & \boldsymbol{H} \\ \hline -\boldsymbol{F} & \boldsymbol{O} \end{array}\right]$$

以上のパラメータを用いて，式 (12) が式 (11) に等しいことを示す．Fig. 4 のオブザーバの推定状態変数 $\hat{\boldsymbol{x}}$ から計算される出力 $\hat{\boldsymbol{y}}$ を

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}[i+1] &= \boldsymbol{A}_H\hat{\boldsymbol{x}}[i] - \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}[i] + (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{D})\boldsymbol{u}[i] \\ \hat{\boldsymbol{y}} &= \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}[i] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}[i] \end{aligned}$$

として与えると伝達関数表現で，

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}} &= -(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_H)^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{y} + (z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_H)^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{D})\boldsymbol{u} \\ \hat{\boldsymbol{y}} &= -\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_H)^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{y} \\ &\quad + \{\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_H)^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{D})+\boldsymbol{D}\}\boldsymbol{u} \\ &= (\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{M}})\boldsymbol{y} + \tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{u} \end{aligned} \tag{A.5}$$

となる．上式から，オブザーバの出力推定誤差 $\boldsymbol{e}_y$ は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{e}_y = \hat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y} = -\tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{y} + \tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{u} \tag{A.6}$$

以上の関係式から，式 (12) が式 (11) に変形できることが以下のように示される．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{K}\boldsymbol{r} \\ &= -\boldsymbol{F}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_H)^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{F}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_H)^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{D})\boldsymbol{u} \\ &\quad + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{K}\boldsymbol{r} \\ &= \tilde{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{Q}(-\tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{y}+\tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{r} \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$(\tilde{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}})\boldsymbol{u} = (\tilde{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{M}})\boldsymbol{y} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{r} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= (\tilde{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}})^{-1}(\tilde{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{M}})\boldsymbol{y} \\ &\quad + (\tilde{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}})^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{r} \qquad \text{(A.9)} \\ &= \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{r} + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{y} \qquad \text{(A.10)} \end{aligned}$$

B. 式 (17) の導出

$\boldsymbol{C}_1[z]$ は次式のようにして式 (17) に変形できるので，Fig. 1 は Fig. 5 のように表現できることが文献 16) で示されている．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}_1 &= (\tilde{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}})^{-1}\boldsymbol{K} \\ &= (\tilde{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}})^{-1}\{(\tilde{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}})\boldsymbol{M} - (\tilde{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{M}})\boldsymbol{N}\}\boldsymbol{K} \\ &\quad (\tilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{M} - \tilde{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{N} = \boldsymbol{I}, \tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{N} = \tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{M}\ \ \text{より}) \\ &= \{\boldsymbol{M} - (\tilde{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{N}})^{-1}(\tilde{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{M}})\boldsymbol{N}\}\boldsymbol{K} \\ &= (\boldsymbol{M} - \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{N})\boldsymbol{K} \end{aligned} \tag{B.1}$$

［著 者 紹 介］

藤 本 博 志（学生会員）

1996 年横浜国立大学工学部電子情報工学科卒業．1998 年同大学大学院工学研究科電子情報工学専攻博士課程前期（修士課程）修了．同年東京大学大学院工学系研究科電気工学専攻博士課程入学．日本学術振興会特別研究員．ディジタル制御，メカトロニクス，モーションコントロールに関する研究に従事．電気学会および IEEE の学生員．

堀 洋 一（正会員）

1978 年東京大学工学部電気工学科卒業．1983 年同博士課程修了．助手, 講師, 助教授を経て 2000 年より同電気工学科教授．制御工学とその産業応用，とくに，モーションコントロールやメカトロニクス分野への応用研究，電気自動車などの研究に従事．1993 年 IEEE/IES 論文誌論文賞．電気学会, 日本機械学会, 自動車技術会, IEEE などの会員．

河 村 篤 男（正会員）

1981 年東京大学工学系研究科電気工学博士課程修了．同年米国・ミズーリ大学電気計算機学科 Post-Doctoral-Fellow，1983 年同大学 Assistant Professor，1986 年横浜国立大学工学部電子情報工学科助教授，1996 年教授，現在に至る．主として，パワーエレクトロニクス，ディジタル制御，電気自動車駆動系，ロボティクスなどの研究に従事．工学博士．1988 年 IEEE/IAS 論文誌論文賞，1996 年電気学会論文賞受賞．電気学会，IEEE，電子情報通信学会，日本ロボット学会等会員．