

# 状態飽和を考慮した高速位置決め制御のための最適軌道生成法の提案

呉 世訓, 堀 洋一 (東京大学生産技術研究所)

Optimal Trajectory Generation with Saturation Time Optimization

Sehoon Oh, Hori Yoichi (Institute of Technology, University of Tokyo)

## Abstract

This paper suggests an algorithm that optimizes a switching time between a saturated dynamics and a linear-optimized dynamics. To trade off two conflicting requirements - high speed position control and constrained state -, we should use an input or a state to its full extent and stop that full usage at proper time. An algorithm proposed in this paper optimizes that switching time. Compared with other optimization methods with constrained states, our method facilitates the problem so that makes problem easy to calculate with a cost function that can be chosen arbitrarily.

キーワード：状態の飽和、線形最適化、高速位置決め制御、軌道生成、振動抑制

(Saturation of states, Linear optimization, High speed position control, Trajectory generation, Vibration suppression)

## 1. 序 論

ハードディスクのシーク制御で見られるような高速、高精度位置決め制御では、指令軌道を適切に設計することが重要な問題の一つである。SMART<sup>(1)</sup> などのような様々な物理量を考えた最適化軌道が提案されている。位置だけでなく速度、加速度、加速度の微分であるジャークまでを考慮した様々な軌道最適化が提案されている<sup>(2)</sup>。

これらに加え軌道最適化において欠かせない問題が飽和问题である。予め定められている距離を高速で移動しようとするとき制御入力にすぐ飽和が生じてしまう。飽和が生じるとシステムのダイナミクスは非線形の領域に入るようになり、それを考慮せずに文献<sup>(2)</sup>で紹介されているような線形最適化を行うと、飽和により制御性能悪化やウィンドアップ現象によるシステムの不安定化が起こる可能性が生じる。そこで一般的な線形最適化では飽和が生じやすい入力や状態に対して大きい重みを与え制限にかからない領域で最適化を行うようにしている。

しかし、このように飽和が生じる入力・状態を抑制するだけが決してよいのではない。利用可能な入力を最大限利用しないので目標値応答特性が悪くなるのである。高速位置決め制御を目標としている場合には制約ぎりぎりまでの入力を利用した方が速応性の面から見たとき望ましい。

この制約を考慮した最適軌道の問題はレファレンスガバナと呼ばれる知られた手法を代表とし、RHC(Receding Horizon Control)<sup>(3)</sup> や LMI<sup>(4)</sup> など様々なアプローチでその最適化が試みられている。また、そのような理論的なアプローチ以外にも HDD のシーク制御における速度制限を考えたより実用的で対象の物理的特長を細かく利用する軌道設計の例<sup>(5)</sup> もある。

本研究では飽和を考慮した最適軌道生成問題を、飽和から抜け出るタイミングの最適化という観点から解くことにする。制約を条件として入れた軌道の最適化でなく、切り

替え時間の最適化であることに注目されたい。またその最適化に利用するアルゴリズムとしては RHC や LMI などのような直感的でないアルゴリズムでなく、LQ 最適化の、もっとも基本的で広く使われている手法を選んでいる。

## 2. 切り替え時間最適化による飽和を含んだ最適軌道生成

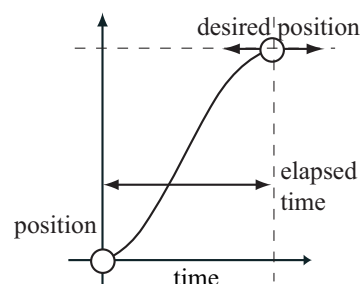


図 1 位置決め制御における軌道生成

Fig. 1. A position trajectory in the Point-to-point Control

2.1 位置決め制御における最適軌道 図 1 に位置決め制御における位置指令例を示す。位置決め制御の高速化では所定の位置 (desired position) まで実位置をできるだけ速く、しかも正確に移動させることが要求される。しかし、その速応性を図るために速度と加速度を急激に変化させると、プラントの固有振動を起こしてしまう可能性があることやその他の物理的な制約にかかってしまう。よってそれらの物理量を無条件に大きくすることもできない。ここから各物理量の変化や大きさを考慮した軌道の最適化が必要となるのである。

この問題に対し、文献<sup>(2)</sup>は位置、速度、加速度、ジャークに適切な重みをつけ最適化する手法を提案している。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u^{(1)}$$

文献ではプラントを簡単に式 (1) のように簡単に定義している。物理的に  $x_1$  は位置、 $x_2$  は速度、 $x_3$  は加速度、 $x_4$  はジャーク、 $u$  はジャークの微分値を意味している。そこで、式 (2) のような評価関数に基づき各物理状態に合わせた重みをつけ最適軌道を生成している。

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T(t) \mathbf{Q} x(t) + u^T(t) \mathbf{R} u(t)) dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) \mathbf{S} x(t_f) \quad (2)$$

しかし、この指令値設計は飽和を陽に考えていなく、制約にかかる状態があればそれに対する重み  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  を大きくすることでその最大値が制約にかからないように設計する方針をとっている。よって制約のある状態・入力を最大限利用することはできない。本研究ではこの飽和を考慮していない線形最適軌道に、入力・状態が飽和している、ぎりぎりまでその入力・状態を利用する軌道を結合する形で飽和を考慮した軌道最適化を行う。

2.2 軌道における飽和と切り替えの関係 図 2 に制約を持った状態のプロファイルを示した。ここでは理解を助けるため入力（たとえば加速度）が飽和する場合の問題を対象にする。

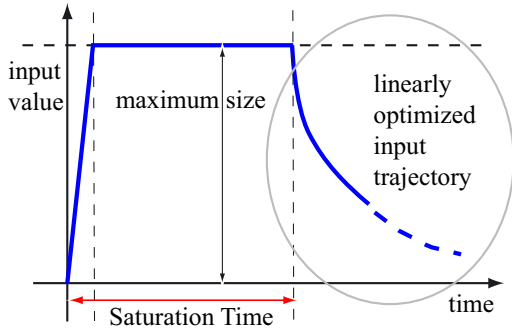


図 2 飽和を持った入力

Fig. 2. An input profile with saturation

位置の移動のためには入力が 0 から値を増やし飽和の領域に一回入り、実位置が所定位置に近づくと飽和を抜け出て自由な領域に入ってくる。このように入力が動く範囲を「飽和領域」と「非飽和領域」に分けることができる。本稿では入力がこの「飽和領域」から「非飽和領域」に出てくる切り替え時間の最適化を行う。

入力が飽和領域に入っていると、軌道は一定の入力をもらうことになりすべての状態はある決まった軌道を動くことになる。その飽和状態時に作られる軌道には調節できるパラメータはなく、ただいつその飽和から抜け出るかとい

うきる切り替え時間だけが最適化対象のパラメータになる。

飽和から抜け出した非飽和領域では従来の線形最適化軌道設計が可能になるので、文献 (2) のような最適化が適用できる。これらのことより飽和を考えた軌道の最適化においてもっとも問題となるのは飽和から出てくる切り替え時間であることがわかる。

文献 (5) ではこの切り替え時間の選定をハードディスクのシーク制御という実対象に対して行っている。ただし、その文献では、実際のハードディスクの VCM モデルやローパスフィルタモデルを利用して実際の各状態の動きを計算し、VCM の逆起電力による遅いモードを消す初期値を選ぶことで切り替え時間を選んでいる。評価関数に基づいた切り替え時間の最適化ではなく、物理的な状況によって一意的に決まってくる、対象とするターゲットに偏ったストラテジーになっている。

それとは違い、本研究では一般 LQ 最適化問題を解くことで最適な切り替え時間を決定し、評価関数が自由に選べるようにする。

### 2.3 切り替え時間最適化による飽和を含んだ軌道の最適化

文献 (6) と (7) には二つの同次型システム間の切り替え時間最適化を紹介している。切り替え時間の変化による評価関数の変化を変分法に基づき最適化している。この最適化を飽和を持った状態の最適化に応用することができる。ただし、文献 (7) で紹介されているように切り替え前後のダイナミクスが同次型であればこの最適化はより解きやすくなる。

本稿で対象としているダイナミクスは切り替え後のダイナミクスに入力を持っているシステムであるが、その入力は状態のフィードバックによって決まり、結果的には同次型になっている。また、切り替え前のダイナミクスも一定の値を持つ状態があるので、簡単な同次型となっている。

式 (3) が切り替え前の飽和時の状態方程式、式 (4) が飽和から抜け出した後、非飽和時の状態方程式である。

$$\text{if } t \leq \tau$$

$$\dot{x}_1(t) = \mathbf{A}x_1(t) + \mathbf{B}u_{\text{const}} \rightarrow \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, t) \quad (3)$$

$$\text{if } t > \tau$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \mathbf{A}x_2(t) + \mathbf{B}u_2(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t))x_2(t) \\ &= \mathbf{A}_{LQ}(t)x_2(t) \rightarrow \dot{x}_2(t) = f_2(x_2, t) \dots \dots \quad (4) \end{aligned}$$

切り替え前の飽和している状態を  $x_1$ 、切り替え後の飽和から抜けた状態を  $x_2$  と区別して書いた。勿論  $x_1$  と  $x_2$  は時刻  $\tau$  で一緒になる連続性を持っている。また式 (4) の  $\mathbf{P}(t)$  は式 (2) を最適化する過程で得られる時変の行列である。そして、 $\tau$  が最適化の対象となる切り替え時間である。この  $\tau$  最適化する評価関数を以下の式 (5) ように定義する。

$$J_\tau = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{x^T(t) \mathbf{Q}_\tau x(t) + u^T(t) \mathbf{R}_\tau u(t)\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^\tau \{x_1^T(t) \mathbf{Q}_\tau x_1(t) + u_1^T(t) \mathbf{R}_\tau u_1(t)\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_\tau^{t_f} \{x_2^T(t) \mathbf{Q}_\tau x_2(t) + u_2^T(t) \mathbf{R}_\tau u_2(t)\} \\
&= \int_0^\tau L_1(t) dt + \int_\tau^{t_f} L_2(t) dt = J_{\tau 1} + J_{\tau 2} \dots (5)
\end{aligned}$$

ただし、重み  $\mathbf{Q}_\tau$ 、 $\mathbf{R}_\tau$  は式 (2) の重み特別をするため添え字  $\tau$  をつけている。式 (2) と同じ重みを選ぶことも可能であるが、基本的にはこの  $\mathbf{Q}_\tau$ 、 $\mathbf{R}_\tau$  は式 (2) の重みと関係なく自由に選べる。

### 3. 変分方による切り替え時間の最適化

3.1 切り替え時間の変分が評価関数に与える影響  
切り替え時間の変化による評価関数の変化は以下のように記述できる。

$$\delta J_\tau = \left( L_1(\tau) - L_2(\tau) + \frac{1}{2} \int_\tau^{t_f} \frac{\partial J_{\tau 2}(t)}{\partial \tau} dt \right) \delta \tau \quad (6)$$

この評価関数の変分の中で、 $L_1(t) = L_2(t)$  という設定と  $\tau$  前後の状態の連続性から第一項目と第二項目は相殺され、 $\tau$  による  $J_\tau$  の変化は第 3 項目である  $\frac{\partial J_{\tau 2}(t)}{\partial \tau}$  だけになる。その  $\frac{\partial J_{\tau 2}(t)}{\partial \tau}$  を計算するために、対象としている式 (3),(4) のシステムにおける  $J_{\tau 2}$  を計算する。

$$\begin{aligned}
J_{\tau 2}(\tau) &= \int_\tau^{t_f} L_2(t, x(t, \tau)) dt \dots \dots \dots (7) \\
&= \frac{1}{2} \int_\tau^{t_f} (x^T(t, \tau) \mathbf{Q}_\tau x(t, \tau) + u(t, \tau)^T \mathbf{R}_\tau u(t, \tau)) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_\tau^{t_f} x^T(t, \tau) (\mathbf{Q}_\tau + \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}_\tau^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t)) x(t, \tau) dt
\end{aligned}$$

$\tau$  の変化による  $L_2(t, x(t, \tau))$  の変化は  $x(t, \tau)$  の初期値  $x(\tau)$  の変化に起因するものである。そこで  $\frac{\partial J_{\tau 2}(t)}{\partial \tau}$  を以下のように考えることができる。

$$\frac{\partial J_{\tau 2}}{\partial \tau} = \int_\tau^{t_f} \frac{\partial}{\partial \tau} L_2(t, x(t, \tau)) dt = \int_\tau^{t_f} \frac{\partial L_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} dt \quad (8)$$

この  $\frac{\partial J_{\tau 2}(t)}{\partial \tau}$  が 0 になる  $\tau$  が最適切り替え時間となる。その  $\tau$  を導くため式 (8) の  $\frac{\partial L_2}{\partial x}$  と  $\frac{\partial x}{\partial \tau}$  を計算する。

$$L_2 = \frac{1}{2} (x^T(t, \tau) (\mathbf{Q}_\tau + \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}_\tau^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t)) x(t, \tau)) \quad (9)$$

であることから

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_2}{\partial x} &= x^T(t, \tau) (\mathbf{Q}_\tau + \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}_\tau^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t)) \\
&= x^T(t, \tau) \mathbf{Q}_{\tau LQ}(t) \dots \dots \dots (10)
\end{aligned}$$

になる。また、式 (7) の  $x(t, \tau)$  は

$$x(t, \tau) = \Phi(t, \tau) x(\tau) \dots \dots \dots (11)$$

のように記述できる。ただし、 $\Phi(t, \tau)$  は式 (4) で記述された飽和から抜け出した後の線形最適化された状態の状態遷移行列であり、

$$\Phi(t, \tau) = \exp\left(\int_\tau^t \mathbf{A}_{LQ}(t_i) dt_i\right) \dots \dots \dots (12)$$

として記述できる。この  $\mathbf{A}_{LQ}(t)$  は式 (4) で定義された行列である。

最後に  $\frac{dx}{d\tau}$  は文献 (6) と文献 (7) で紹介されているアルゴリズムで計算できる。

$$\frac{dx(t)}{d\tau} = \Phi(t, \tau) (\mathbf{B} u_{\text{cosnt}} + \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(\tau) x(\tau)) \quad (13)$$

ここで一つ注目すべきことは式 (2) を最適化する時に現れる行列  $\mathbf{P}(t)$  のことである。LQ 最適化の求解過程で入力の変化による影響関数 (influence function) として現れる  $\mathbf{P}(t)$  は時変ゲインの役割をする。LQ 最適化におけるこの  $\mathbf{P}(t)$  はリッカチ方程式

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} \dots \dots \dots (14)$$

の解であり、その境界値は以下のように決める。

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{S} \dots \dots \dots (15)$$

ただし、 $\mathbf{S}$  は式 (2) に現れる終端状態に対する重みである。

ということで、 $\mathbf{P}(t)$  は時変ではあるが、切り替え時間  $\tau$  と関係なく決められる量であることがわかる。すなわち、 $\frac{\partial J_{\tau 2}}{\partial \tau}$  を計算する過程で  $\mathbf{P}(t)$  は  $\tau$  に関しては定数とみなすことができるのである。

3.2 変分法を利用した最適切り替え時間の計算  
以上の関係を用いて  $\frac{\partial J_{\tau 2}}{\partial \tau}$  を計算する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_2}{\partial \tau} &= x^T(\tau) \int_\tau^{t_f} \Phi^T(t, \tau) \mathbf{Q}_{\tau LQ}(t) \Phi(t, \tau) dt \\
&\quad \cdot (\mathbf{B} u_{\text{cosnt}} + \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(\tau) x(\tau)) \\
&= x^T(\tau) \mathbf{G}(\tau) (\mathbf{B} u_{\text{cosnt}} + \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(\tau) x(\tau)) \quad (16)
\end{aligned}$$

式 (16) の  $\tau$  の関数を計算するために  $\mathbf{G}(\tau)$  という変数を定義した。その定義は以下の式 (17) のとおりである。

$$\mathbf{G}(\tau) = \int_\tau^{t_f} \Phi^T(t, \tau) \mathbf{Q}_{\tau LQ}(t) \Phi(t, \tau) dt \dots \dots \dots (17)$$

この  $\mathbf{G}(\tau)$  は積分関数であり、以下のような微分方程式を解くことで得ることができる。

$$\dot{\mathbf{G}}(\tau) = -\mathbf{Q}_{\tau LQ}(\tau) - \mathbf{A}_{LQ}^T(\tau) \mathbf{G} - \mathbf{G} \mathbf{A}_{LQ}(\tau) \dots (18)$$

そして、 $\mathbf{G}(t)$  の境界値は式 (17) の定義から

$$\mathbf{G}(t_f) = 0 \dots \dots \dots (19)$$

となる。

以上のことから、あらかじめ決められた飽和状態を含んだ二つの切り替え可能なシステム、式 (3),(4) があれば、そこから  $\mathbf{G}(t)$  を計算し、式 (16) に代入することで  $\frac{\partial J_{\tau 2}}{\partial \tau}$  が計算でき、そこから最適な  $\tau$  を導くことが可能になるのである。

#### 4. 数値シミュレーションによる最適性の実証

3.2 節で提案した切り替え時間最適化アルゴリズムの数学的な正しさをシミュレーションで実証する。まず、以下の式 (20) のようなシステムを対象とする。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (20)$$

$x_1$  を位置、 $x_2$  を速度、 $x_3$  を加速度、 $u$  をジャークと関係付けできる。このシステムに対して、 $\mathbf{Q} = \text{diag}(1000, 1, 0.1)$ 、 $\mathbf{R} = 200$  の重みで式 (2) を満たす最適化入力  $u_{\text{opt}}(t)$  と軌道を設計した。その線形最適化軌道と、 $u = u_{\text{const}} = -300$  とし入力に  $\pm 300$  以下という制約を加えた飽和状態から始まるシステムの切り替え時間最適化を、重み  $\mathbf{Q}_\tau = \text{diag}(1000, 1, 0.1)$ 、 $\mathbf{R}_\tau = 10$  をもって行った。

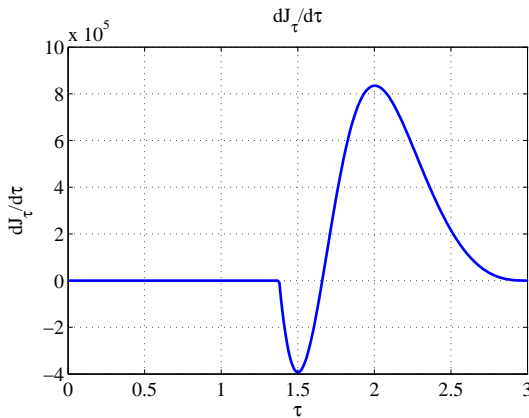


図3  $\tau$  の変化に対する評価関数  $J_\tau$  の変化量  
Fig. 3. Differentiation of  $J_\tau$  by  $\tau$

上の図3が、対象となっている切り替えシステムに対し式 (16) を計算した結果である。0 から 1.4 秒の間は式 (2) を最適化する線形最適化入力  $u_{\text{opt}}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(\tau)x(t)$  が入力の最小値  $-300$  を超えてしまうので飽和しつつある状態であり、切り替えを行っても飽和により入力が変わらない時間帯である。よって切り替えの意味はなく  $J_\tau$  も変わらない。1.4 秒を過ぎてから  $u_{\text{opt}}$  が上下限値の間の値を持つようになり  $J_\tau$  にも変化が現れる。

この  $\frac{dJ_\tau}{d\tau}$  の計算結果では  $u_{\text{opt}}$  が上下限に引っかからない領域に入ってきたからといってすぐ切り替えしないで、約 1.6 秒まで飽和を続けた後、 $u_{\text{const}}$  から  $u_{\text{opt}}$  に切り替える切り替えタイミングが  $J_\tau$  を最適化させる結果になっている。実際に  $\tau$  を 0 秒から 3 秒まで変化させながら式 (2) に基づき  $J_\tau$  を計算した結果を図4に示す。この結果から  $\frac{dJ_\tau}{d\tau}$  の計算が正しく、1.6 秒あたりに  $J_\tau$  の最適点が存在することがわかる。

#### 5. 結論

本稿では切り替え時間最適化という観点から飽和を考慮

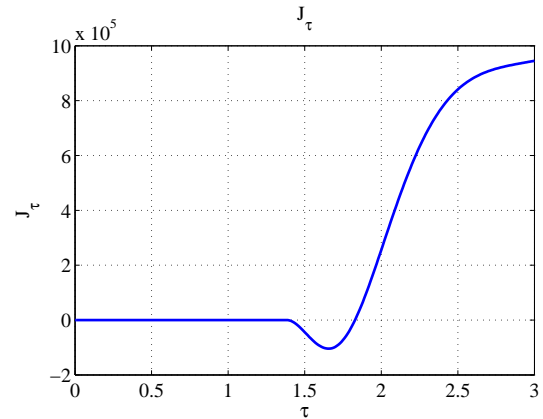


図4 実際のシミュレーションによる  $J_\tau$  の変化  
Fig. 4.  $J_\tau$  obtained by simulation

した最適軌道を設計した。制約されている状態を飽和時と非飽和時に分け、その切り替え時間を最適化の対象にすることによって問題を単純化し、一般的に使われている変分法を利用して解が求められるようにした。またその求解過程の正しさをシミュレーションによって実証した。今後は実際に設計した軌道を利用して実験を行い、その有効性を確かめる予定である。

最後にここで紹介した切り替え時間の変化を初期値変化として捕らえ、変分法によりそれを最適化するという考え方は、切り替え時間最適化だけでなく状態の制約自体、すなわち制限したい状態の最大制限値の最適化にも適用できるアルゴリズムと言える。

#### 参考文献

- (1) Y. Mizoshita, et al.: "Vibration Minimized Access Control for Disk Drives", *IEEE Trans. on Magnetics*, pp. 1793-1798, Vol. 32, No. 3, 1996
- (2) Byunghoon Chang, Yoichi Hori: "Trajectory Design Considering Derivative of Jerk for Head-positioning of Disk Drive System with Mechanical Vibration", *American Control Conference*, pp.4335-4340, 2003.
- (3) Alberto Bemporad, et al.: "Nonlinear Control of Constrained Linear Systems via Predictive Reference Management", *IEEE Trans. on Automatic Control*, pp.340-349, AC-42(3), 1997
- (4) 杉江俊治, 山本浩之: 「状態及び入力の制約を考慮した閉ループ系の目標値生成」, 計測自動制御学会論文集, pp.849-855, Vol.37, No.9, 2001
- (5) 石川潤, 服部俊朗, 橋本雅伸: 「二自由度制御に基づく磁気ディスク装置の高速位置決め制御」, 日本機械学会論文集, pp.1848-1856, 62-597-C, 1996
- (6) Arthur E. Bryson, Jr. Yu-Chi Ho: *Applied Optimal Control*, Emisphere Publishing Corporation, 1975.
- (7) M. Egerstedt, et al.: "Optimal Control of Switching Times in Switched Dynamical Systems", *American Control Conference*, pp.2138-2143, 2003