繰返し完全追従制御における n 倍速学習フィルタを用いた 高速・高精度位置決め制御

竹村征*,藤本博志(東京大学)

High Speed and High Precision Positioning by Repetitive Perfect Tracking Control with *n*-times Learning Filter Tadashi Takemura^{*}, Hiroshi Fujimoto (The University of Tokyo)

Abstract

Repetitive control (RC) is one of techniques to achieve high precision positioning and repetitive perfect tracking control (RPTC) is one of RC. In this paper, RPTC with *n*-times learning filter is proposed. Tracking error of proposed RPTC converges *n*-times faster than RPTC with conventional learning filter. Simulations show the faster convergence of proposed RPTC and the validity of mathematical analysis. Finally, experiments in ball screw driven stage also show the effectiveness of proposed system.

キーワード:繰返し制御,完全追従制御,n倍速学習,零位相ローパスフィルタ

(repetitive control, perfect tracking control, n-times learning, zero phase low phase filter)

1. はじめに

近年,製品の微細加工化や生産の高効率化の要求がさら に高まっており,生産機器の高速・高精度位置決め技術の発 展が望まれている。本稿では,繰返し制御を用いて高速・高 精度位置決めを目指す。繰返し制御は,連続する繰返し動作 に対して追従誤差を抑圧する方法として知られている⁽¹⁾。

これまで著者らの研究グループでは,完全追従制御 (PTC: Perfect Tracking Control)⁽²⁾を用いた繰返し制御系 (RPTC: Repetitive PTC)⁽³⁾を提案しており,様々なアプ リケーションでその有用性を実証してきた⁽⁴⁾⁽⁵⁾。さらに, RPTCを磁気ディスク装置のシーク制御に応用し,その有 効性を示した⁽⁶⁾。RPTCは,モデル化誤差なし,ローパス フィルタなしの理想条件下では1回の学習で,次回以降の繰 返し動作での追従誤差を零とできることが解析により明ら かになっている。ところが,実際にはモデル化誤差がないよ うに制御器設計することは難しい。また,RPTCの安定性は ローパスフィルタで確保するため,モデル化誤差やノイズが ある場合にはこれを取り除くことはできない⁽⁷⁾。以上より,



図 1 追従誤差の高速収束 Fig. 1. Fast convergence of tracking error.

RPTC は理想条件下で用いることはできない。繰返し動作 1回目で発生した追従誤差は図1上段に示すように,1回, 2回,...,n回と学習を重ねるにつれ, $e_2, e_3, \ldots, e_{n+1}, \ldots$ と徐々に抑圧されていく。高速位置決めの観点からは,学 習回数はできるだけ少ないことが望ましい。

そこで本稿では,図1下段に示すように,従来ではnの学 習でを達成する e_{n+1}を1回の学習のみで達成する,n倍速 学習フィルタを用いた RPTC を提案する。n倍速学習フィ ルタは,従来の RPTC の学習ローパスフィルタを多段の構 成にして実現される。n倍速学習フィルタを用いた RPTC では,モデル化誤差がないとき,従来の RPTC のn倍の速 さで誤差が収束することを解析的に示す。また,n倍速学 習フィルタは従来型フィルタよりも低域通過特性,高域遮 断特性に優れていることを明らかにする。シミュレーショ ンにより提案手法の有効性と解析結果の妥当性を示す。最 後に,ボールねじ駆動ステージにおける実験で,提案手法 の有効性を検証した。

2. RPTC ^{(3) (6)}

2・1 制御系構成 図 2 に示す RPTC は, FB 制御器 とマルチレートフィード FF 制御器から構成される二自由度



図 2 RPTC のブロック図 Fig. 2. Block diagram of RPTC.



Fig. 3. Block diagram of PSG.

制御系(PTC)と、周期信号発生器(PSG: Periodic Signal Generator)と呼ばれる学習機構により構成される。図3は PSGのブロック図で、メモリ、ローパスフィルタ Q_r 、状態 変数生成器で構成される。メモリは発生した外乱を記憶す ると同時に、ローパスフィルタと状態変数生成器で発生す るサンプル遅れを回復させる役割も果たしている。メモリ 数は外乱周期 T_d をサンプル時間 T_r で割った N_d (= T_d/T_r) 個必要となる。ローパスフィルタ Q_r は、零位相ローパス フィルタ Qをプロパにしたもので、次式で表される。

$Q = \left(\frac{z+2+z^{-1}}{4}\right)^{N_q}$	 (1)
$Q_r = z^{-N_q} Q \cdots$	 (2)

Qr はメモリのサンプル進み補償によって, Q として機能 する。状態変数生成器が PSG に備わっているのは, マル チレート FF 制御器がその入力に目標軌道の状態変数(位 置と速度)を必要とするためである。速度は, 位置を中心 差分することで位相遅れがないように算出される。発生し た追従誤差をメモリに蓄え(学習),1周期後に状態変数と して加えることで,目標軌道を再設計し,周期外乱を抑圧 する。

2・2 収束条件 まず,本節で扱う信号について説明 する。サンプル時間 T_r ,繰返し周期 $T_d(=N_dT_r)$ における 信号を以下のようなベクトルで表す。

 $\boldsymbol{v}_{j} = [v_{j}[0], v_{j}[1], \dots, v_{j}[N_{d}-1]]^{T}$

ここで,添字の j は繰返し回数 (j = 1, 2, ...) を表している。また,離散時間系の伝達関数 G は,繰返し周期 T_d においては次のようにインパルス応答行列で表される。

	$\int g_0$	0	 0
~	g_1	g_0	 0
$G = \left \right $		÷	 ÷
	g_{N_d-1}	g_{N_d-1}	 g_0

インパルス応答行列は下三角行列で,かつ Toeplitz 行列で あるため,インパルス応答行列同士の積は可換である。こ れらの表現を用いることで,繰返し周期 T_d におけるサン プル時間 T_r 毎の入出力関係は $y_j = GHu_j = HGu_j$ とい うように,入出力信号ベクトルとインパルス応答行列で表



図 4 RPTC の等価ブロック図 Fig.4. Equivalent block diagram of RPTC.

現できる。

収束条件を図4の等価ブロック図より求める。等価ブロッ ク図は以下の仮定に基づいている。

- RPTC はマルチレート制御系であるため,サンプリン グ時間が異なる信号が存在するが,簡単のため長いサ ンプリング時間 T_rのシングルレート制御系として考 える。
- マルチレート FF 制御器はゲイン,位相ともに完全なプラントの逆システムであるため P⁻¹_nとする。さらに, この制御器の入力は状態変数であるが,簡単のため位置のみを入力として考える。この仮定により,PSGの状態変数生成器は無視できる。

RPTC の誤差収束条件は,繰返し動作 j回目と (j + 1)回目の誤差ベクトル $e_j \ge e_{j+1}$ の関係から求まる。まず,繰返し動作 j回目出力ベクトル y_i は

$$m{y}_j = (m{I} + m{P}m{C})^{-1}m{P}\left\{(m{P}_n^{-1} + m{C})m{r}_j' - m{d}
ight\} \ = m{S}m{P}\left\{(m{P}_n^{-1} + m{C})(m{r} + m{Q}\sum_{h=1}^{j-1}m{e}_h) - m{d}
ight\}$$

と書ける。ただし,

e

とした。これより,繰返し動作 *j*回目における誤差ベクト ル *e_j*は次のように表される。

$$egin{aligned} & egin{aligned} & egi$$

同様に,次周期の誤差ベクトル e_{j+1}を導出する。

$$egin{aligned} m{e}_{j+1} &= m{r} - m{y}_{j+1} \ &= ig\{m{I} - m{SP}(m{P}_n^{-1} + m{C})ig\}m{r} \ &- m{QSP}(m{P}_n^{-1} + m{C})\sum_{h=1}^jm{e}_h - m{SPd} \ &= ig(m{I} - m{QSPP}_n^{-1} + m{QSPC}ig)m{e}_j \end{aligned}$$

ここで,プラントが乗法的モデル化誤差を持つとすると,

 $P = P_n(I+\Delta)$ と書ける。また,式(3)よりSPC = I-Sである。これらより, e_{j+1} は次のように整理できる。

$$e_{j+1} = \{I - QS(I + \Delta) - Q(I - S)\}e_j$$
$$= (I - Q - QS\Delta)e_j$$
$$= (I - Q - QS\Delta)^j e_1 \cdots \cdots \cdots \cdots (4)$$

上式は , 繰返し動作 1回目で生じた誤差ベクトル e_1 は $(I-Q-QS\Delta)$ で収束していくことを意味している。

RPTC の最大の特徴は,式(4)から,Q = I, $\Delta = O$ の 理想条件では, $e_2 = O$ となることである。これは1回学 習すると,繰返し動作2周期目以降で完全追従が達成され ることを意味している。

3. n 倍速学習フィルタ \tilde{Q}_n による高速収束 RPTC

3・1 学習フィルタの変更による収束の変化 RPTC は繰返し回数 j(=1,2,3,...)が進むにつれ,誤差は図1上 段のように $e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow e_3 \rightarrow ...$ と収束する。本章では,1 回の学習で n(=2,3,4,...)回分の学習効果を得て,誤差を 図1下段のように $e_1 \rightarrow e_{n+1} \rightarrow e_{2n+1} \rightarrow ...$ と高速に収 束させる RPTCを提案する。提案する RPTC は,Qフィル タを n 倍速学習フィルタ \tilde{Q}_n に変更することで実現される。

まず,従来 RPTC において *e*₁ が生じたとき,式(4) と 二項定理を用いると,*e*₃,*e*₄,...,*e*_{n+1} は以下のように なる。

$$e_3 = (I - Q - QS\Delta)^2 e_1$$

= {(I - Q)² - 2(I - Q)QS\Delta + (QS\Delta)²} e_1⁽⁵⁾

$$e_4 = (I - Q - QS\Delta)^3 e_1$$

= {(I - Q)³ - 3(I - Q)²QS\Delta
+3(I - Q)(QS\Delta)² - (QS\Delta)³} e_1

$$e_{n+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q} - \mathbf{QS\Delta})^n e_1$$

$$= \left\{ \sum_{m=0}^n {}_n C_m (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{n-m} (-\mathbf{QS\Delta})^m \right\} e_1$$

$$= \left\{ (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^n + n(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{n-1} (-\mathbf{QS\Delta}) + \sum_{m=2}^n {}_n C_m (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{n-m} (-\mathbf{QS\Delta})^m \right\} e_1$$
(7)

次に, PSG のローパスフィルタ $Q \in \tilde{Q}_n$ に変更すること を考える。このときの学習の収束は式 (4) より次式となる。

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_{j+1,n} = \left(\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{Q}}_n - \tilde{\boldsymbol{Q}}_n \boldsymbol{S} \boldsymbol{\Delta}\right)^j \boldsymbol{e}_1 \cdots \cdots \cdots \cdots (8)$$

ここで, \tilde{Q}_n を以下のように設計する。

このとき,nによって繰返し動作2回目の誤差 $\tilde{e}_{2,n}$ は以下

のようになる。

$$\cdot \tilde{Q}_2 = 2Q - Q^2$$
 のとき
 $\tilde{e}_{2,2} = \left\{ I - (2Q - Q^2) - (2Q - Q^2)S\Delta \right\} e_1$
 $= \left\{ (I - Q)^2 - 2(I - Q)QS\Delta - Q^2S\Delta \right\} e_1^{(10)}$

・
$$ilde{Q}_3 = 3Q - 3Q^2 + Q^3$$
のとき

$$\begin{split} \tilde{Q}_n &= \sum_{m=1}^n C_m Q^m (-1)^{m+1} \mathcal{O} \succeq \mathfrak{E} \\ \boldsymbol{e}_{2,n} &= \left[\boldsymbol{I} - \sum_{m=1}^n n C_m \boldsymbol{Q}^m (-1)^{m+1} \\ &- \left\{ \sum_{m=1}^n n C_m \boldsymbol{Q}^m (-1)^{m+1} \right\} \boldsymbol{S} \boldsymbol{\Delta} \right] \boldsymbol{e}_1 \\ &= \left[(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^n + n (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{n-1} (-\boldsymbol{Q} \boldsymbol{S} \boldsymbol{\Delta}) \\ &- \left\{ \sum_{m=2}^n n C_m (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{n-m} \boldsymbol{Q}^m \right\} \boldsymbol{S} \boldsymbol{\Delta} \right] \boldsymbol{e}_1 \end{split}$$
(12)

ここで,式(5)~式(7)と式(10)~式(12)を比較すると, $e_{n+1} \ge \tilde{e}_{2,n}$ それぞれの右辺第一項と第二項は同じである。 もし,右辺第三項目の誤差を無視できるとすれば,

が成り立つ。この式は,フィルタがQであったときにn回 学習したときの追従誤差は,フィルタを \tilde{Q}_n としたときに 1回学習したときの追従誤差と等しくなることを意味して いる。

3・2 モデル化誤差がないとき モデル化誤差 $\Delta = O$ のとき, $e_{n+1} \ge \tilde{e}_{2,n}$ は完全に等しくなる。

式 (7) と式 (12) より , (jn+1) 回目動作時の追従誤差 $\tilde{e}_{j+1,n}$ は

$$\boldsymbol{e}_{jn+1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{jn} \boldsymbol{e}_1 = \{ (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^n \}^j \boldsymbol{e}_1$$

= $\tilde{\boldsymbol{e}}_{j+1,n}$ (15)

である。上式より,学習フィルタQでは e_{jn+1} となるまで に jn回の学習を必要とする。これに対して, n倍速学習 フィルタ \tilde{Q}_n を用いれば, j回の学習で e_{jn+1} に到達する。 よって, \tilde{Q}_n を用いれば, Qを用いた場合よりもn倍速く収 束する。さらに,収束の安定性はQの場合と同じである。



図 6 \tilde{Q}_n のゲイン特性 Fig. 6. Gain characteristic of \tilde{Q}_n .

3・3 *n* 倍速学習フィルタ \hat{Q}_n の実装 *n* 倍速学習 フィルタ \tilde{Q}_n は,式 (9) からもわかるように。従来型フィ ルタ Q の *n* 段構成であるので,次式のように FIR 表現で 表すことができる。

$$\tilde{Q}_n = \sum_{m=-nN_q}^{nN_q} a_m z^n$$

これはノンプロパであるため, PSG に実装する際には次式 のようにプロパにする。

式 (2) と式 (16) を比較すると,それぞれのフィルタをプロ パにするためのサンプル遅れの数が異なる。このため, \tilde{Q}_n を実装する際には,図3中のメモリでのサンプル遅れの数を 変更しなくてはならない。従って,n倍速学習フィルタ \tilde{Q}_n を実現する PSG は図5となる。メモリは追従誤差を記憶す るだけでなく, \tilde{Q}_{nr} と状態変数生成器で生じる $(nN_q + 2)$ サンプル遅れを進める役割を果たしている。サンプル遅れ がメモリ数 N_d を超えると,この進み補償ができなくなる ためnには次式の制約がある。

$$nN_q + 2 < N_d$$
$$n < \frac{N_d - 2}{N_q}$$

3・4 *n* 倍速学習フィルタ \tilde{Q}_n の特性 *n* 倍速学習 フィルタ \tilde{Q}_n のカットオフ特性を検証する。モデル化誤差 がない場合には,式(4)より Q = I のとき,1 回の学習 で次周期以降の追従誤差が零になる。Q = I のゲイン特性



図7 周期外乱と制御対象の特性

Fig. 7. Periodic disturbance and characteristic of plant.

は,全周波数で 0[dB] である。しかしながら,実際には高 周波帯に存在するノイズや共振成分により不安定になって しまうことから,高周波成分は除去する必要がある。従っ て,RPTC においてはやく収束し,かつ安定な設計にする ためには,0[dB] でできるだけ高い周波数まで通過しつつ, 高域遮断特性の急峻なフィルタが求められる。

図 6 に Q, \tilde{Q}_n のゲイン特性を示す。図 6(a) は, $Q(N_q = 0, 1, 5, 20)$, \tilde{Q}_2 , $\tilde{Q}_{10}(N_q = 20)$ をそれぞれプロットしたもので,図 6(b) はその拡大図である。このときのサンプリング時間 2[ms] である。ここで,Q, \tilde{Q}_n は零位相フィルタであるため,位相特性は全周波数において 0[deg] である。

まず,両図より,Qは N_q を大きくしていくと,高域遮断特性は良くなるが,0[dB] で通過する周波数が下がる。次に, \tilde{Q}_n の特性に着目する。 $Q, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_{10}(N_q = 20)$ を比較すると,nを大きくすると0[dB] で通過する周波数が大きくなっている。また, $Q(N_q = 1)$ と \tilde{Q}_{10} を比較すると,図 6(a)より \tilde{Q}_{10} の方が高域遮断特性が良く,図 6(b)より0[dB] で通過する周波数は \tilde{Q}_{10} の方が大きい。これより, \tilde{Q}_{10} は $Q(N_q = 1)$ よりも,RPTCの学習フィルタに適していると言える。

これまでのフィルタ Q では, N_q を大きくすることで低 域通過特性を犠牲にしながら高域遮断特性を改善していた。 これに対して, n 倍速学習フィルタ \tilde{Q}_n を用いれば, N_q で 高域遮断特性を改善した上に, n を大きくすることで低域 通過特性も改善できることがわかった。

4. シミュレーション

提案法の有効性をシミュレーションで示す。ハードディ スク装置を想定し,HDD ベンチマーク問題 Ver.1の機械パ ラメータ⁽⁸⁾を用いて,図7(a)に示す振幅0.15[track],周 波数120Hzの正弦波出力端外乱を抑圧するシミュレーショ ンを行う。制御対象を次式に示す。

$$P_N(s) = K_p P_{mech}(s), K_p = \frac{K_f}{mT_p}$$
$$P_{mech}(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2}, \omega_i = 2\pi f_i$$

*P*₁, *P*₄ の周波数特性を図 7(b) に示す。各パラメータは文 献⁽⁸⁾ を参照されたい。



図 9 シミュレーション結果(モデル化誤差あり) Fig. 9. Simulation results (with modelling error).

ここで, $P_1(s)$ に対して, 2次のマルチレート FF 制御器 と PID 制御器を設計した。さらに, $N_q = 20$, サンプリン グ時間を $T_r(=2T_u, T_u = 60/7200/220)$ として Q, 3 倍速 学習フィルタ \tilde{Q}_3 を設計した。Q, \tilde{Q}_3 を用いた RPTC を それぞれ従来法,提案法として比較する。

モデル化誤差がない場合 制御対象を P₁(s) と 4.1 し,シミュレーションを行った。ここでは,マルチレート FF 制御器により, モデル化誤差は零となる。さらに結果を 見やすくするために,正弦波外乱2周期分($T_d = 1/60 \approx$ 0.017[s])を1周期分の外乱と見なして考える。また,過渡 状態での学習を避けるため, $T_d[s]$ 経過してから学習を開始 した。このときのシミュレーション結果を図8に示す。図 8(a) は追従誤差を表わしており,図8(b)と図8(c)はそれ ぞれ図 8(a) の 3 周期目と 5 周期目を拡大したものである。 補償が始まる 2T_d[s] 以降で,両手法とも追従誤差が低減さ れる。ここで,図8(b)で見られるパルス状の誤差は,補償 開始時に不連続な状態変数がマルチレート FF 制御器に入 力されるために発生すると考えられる。図8(c)より,パル ス状誤差を除いて,従来法の5周期目の追従誤差は,提案 法3周期目の追従誤差と等しくなっている。従来法では2 周期目から3周期分の学習を経て5周期目の誤差を得られ



(b) Frequency property.

図 10 実験機と周波数特性



るが,提案法では2周期目から1周期分だけの学習でこれ を達成できる。従って,提案法では1回の学習で従来の3 回分の学習効果が得られ,収束が3倍はやくなったと言え る。また,パルス状誤差は3倍はやく収束しないものの, 提案法では従来法よりはやく収束する。

4・2 モデル化誤差がある場合 制御対象を *P*₄(*s*) とした。このとき三つの共振モードはモデル化誤差となる。 同様に,シミュレーション結果を図 9 に示す。いずれの図



図 11 実験結果 Fig. 11. Experimental results.

からも提案法は従来法よりもはやく収束している。図9(c) で従来法5周期目と提案法3周期目の誤差を比較すると, 提案法の方がやや大きい。これより,モデル化誤差がある 場合には,1回の学習で完全に3回分の学習効果が得られ ない。しかしながら,線形のモデル化誤差があってもその 影響は小さく,十分に高速な収束が期待できる。

5. 実 験

図 10(a) に示す工作機械用ボールねじ駆動ステージにお いて実験を行った。実験機の周波数特性は図 10(b) である。 シミュレーション同様,マルチレート FF 制御器は剛体部 分をモデル化, PID の位置 FB 制御器を設計した。サンプ リング時間 2[ms], $N_q = 20$ でQ, \tilde{Q}_5 を設計した。Q, \tilde{Q}_5 を用いた RPTC をそれぞれ従来法,提案法とする。このと きの実験結果を図 11 に示す。図 11(a) は与えた目標位置軌 道である。図 11(b) はこのときの追従誤差で,図 11(c) は 3 周期目の誤差を拡大した図である。図 11(b),図 11(c) より, 各周期の最大誤差は提案法の方が小さくなっている。これ より,提案法では \tilde{Q}_5 を用いることで効果的な学習してい ると言える。しかしながら,シミュレーションのような高 速な誤差の収束を得られないのは,非線形摩擦によって生 じる外乱が完全な周期外乱ではないためと考えられる。

6. まとめ

本稿では, RPTC において誤差の収束を n 倍はやくする n 倍速学習フィルタを提案した。n 倍速学習フィルタは低 域通過特性,高域遮断特性に優れていることを明らかにし た。シミュレーションにおいて,モデル化誤差がない場合 には,誤差が従来 RPTC よりも n 倍ではやく収束するこ とを確認した。また,モデル化誤差がある場合にも,その 影響は小さく十分に高速な収束が期待できることを示した。 ボールねじ駆動ステージにおいて実験を行い,完全な周期 外乱でなくても n 倍速学習フィルタを用いることで RPTC の収束をはやくすることを示した。

今後は,非線形要素の比較的小さなハードディスク装置 で実験を行い,n倍速学習フィルタを用いた RPTC の有効 性を実証する。

参考文献

- (1) D. A. Bristow, M. Tharayil, and A. G. Alleyne, "A survey of iterative learning control." Control Systems Magazine, IEEE, 26(3):96-114, 2006.
- (2) H. Fujimoto, Y. Hori, A. Kawamura, "Perfect Tracking Control based on Multirate Feedforward Control with Generalized Sampling Periods", IEEE Trans. Industrial Electronics, vol. 48, No. 3, pp. 636-644, 2001.
- (3) H. Fujimoto, "RRO Compensation of Hard Disk Drives with Multirate Repetitive Perfect Tracking Control", IEEE Trans. Industrial Electronics, vol. 56, no. 10, pp. 3825–3831, 2009.
- (4) 中井孝洋,藤本博志, "繰り返し完全追従制御による PMSMの高調波電流抑制",電気学会論文誌 D, vol.128, no. 9, pp. 1083–1089, 2008
- (5) H. Asaumi, H. Fujimoto, "Proposal on Presice Positioning Control of Ball Screw Stage Based on ILC with PTC", IIC-07-128, pp.71-76, 2007 (in Japanese).
- (6) H. Endo, H. Fujimoto, "Short-Span Seeking Control of Hard Disk Drive Based on Integral Type Learning PTC", in Proc. The 11th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control Proceedings, Niigata, pp.554-559, 2010.
- (7) 白石貴行,藤本博志,"PTC に基づく繰返し学習制御を用 いたピエゾスキャナの位置決め制御",平成 22 年電気学 会産業計測制御研究会,IIC-10-110, pp.37-42, 2010
- (8) 山口高司,平田光男,藤本博志,"ナノスケールサーボ制御 高速・高精度に位置を決める技術",東京電機大学出版局, 2007