

# 推力制約を持つ終端状態制御における 初期状態変数を用いた制御切り替え条件

矢崎 雄馬\*, 藤本 博志 (東京大学)

Activation Condition Using Initial State Variables in Final-State Control with Thrust Limitations  
Yuma Yazaki\*, Hiroshi Fujimoto (The University of Tokyo)

## Abstract

Mode Switching Control (MSC) is a control method which switches one control mode to another by using some switching conditions. MSC has been used widely in robots and hard disk drives. Considering thrust limitations, however, the switching condition is generally conservative since there are not any clear criteria to switch the control modes. For this reason, this paper proposed a new index of switching conditions which uses initial state variables in Final-State Control (FSC) with thrust limitations. FSC is mainly applied to systems such as hard disk drives whose initial state variables are the zero. In the case of applying FSC to MSC, however, initial state variables are not the zero because FSC begins to be activated from the middle of a motion. This paper leads conditions of initial state variables in FSC with thrust limitations to apply FSC to MSC. These conditions become new indexes because feedforward inputs which take an initial state to a final state in finite time can be generated automatically taking into account thrust limitations by using these conditions.

キーワード：終端状態制御，モード切り替え制御，推力制約，初期状態変数，エネルギー最小化，ジャーク最小化  
(Final-State Control, Mode-Switching Control, Thrust Limitation, Initial State Variable, Energy Minimization, Jerk Minimization)

## 1. はじめに

ロボットやハードディスクドライブなど、1つの動作中に異なる種類の動作を順次行うことが求められる制御対象の場合、複数の制御モードを切り替えるモード切り替え制御 (Mode Switching Control: MSC) が多く用いられている。MSC とは、一つの動作を実行している間に、検出、推定された状態量を用いてある判定条件によって制御モードを切り替える制御法である。MSC ではモード切り替え直後における状態変数の適切な初期値の設定及び切り替え条件の設計による過渡応答の改善が主に検討されている。

モード切り替え直後における状態変数の適切な初期値設定に関する研究としては、測定した制御対象の状態変数にあらかじめ設計した実係数行列を乗じることで、制御器の初期状態を計算する初期値補償制御などが提案されている<sup>(1)</sup>。また、切り替え時に制御器の初期値を設定することは、制御器出力にフィードフォワード (FF) 入力を加えることと等価なことから、FF 入力を付加する形式の初期値補償制御も提案されている<sup>(2)</sup>。

一般に切り替え条件の設計は、切り替え時における制御対象の状態変数の最適な組み合わせを求める問題に帰着される。切り替え条件の設計に関する研究としては、切り替え後の応答の2乗積分や、操作量の2乗積分などを評価関数として、最適な状態変数の初期値を求める方法が提案されており、実験により有効性が示されている<sup>(3)</sup>。

しかし、多くの場合モード切り替えの指標は位置誤差のみであり、切り替え条件に関する明確な基準がないため、切り替え条件は設計者の経験により決められてきた。また、

アクチュエータの推力を飽和させないために保守的な設計になりがちであった。そこで本稿では、切り替え条件の新たな指標を提案する。この指標は、推力制約を持つ終端状態制御 (Final-State Control: FSC)<sup>(4)</sup> における初期状態変数を用いたものである。

FSC とは、あるシステムに対し FF 入力を与えることで、状態を有限時間で指定した終端状態にもっていく制御法である。FSC はハードディスクドライブのショートスパンシークなどの制御によく用いられてきた<sup>(5)</sup>。FSC の派生としては、高い共振モードを励起させないように設計する frequency-shaped FSC (FFSC)<sup>(6)</sup>、FF 入力を多項式により近似する polynomial-input-type FFSC (PFFSC)<sup>(6)</sup>、制御入力の飽和を考慮した LMI PFFSC<sup>(7)</sup>、時変な終端状態に対して適用可能とした updating FSC (UFSC)<sup>(8)</sup> など様々な研究がある。これらの FSC に関する先行研究では、初期状態変数が零であると仮定するものが多かった。しかし、FSC を MSC に適用する場合、動作の途中から FSC を行うことになるため、初期状態変数が零でなくなるのが大きな特徴である。本研究では、FSC を MSC に適用するために、推力制約を持つ FSC における初期状態変数条件について検討した。この条件を用いることにより推力制約を考慮しつつ、状態を指定した終端状態にもっていく FF 入力を自動で生成できるようになるため、この条件は制御切り替えの新たな指標の一つとなると考えられる。

## 2. 推力制約を持つ終端状態制御における初期状態変数条件

本章では、推力制約を持つ FSC における初期状態変数条

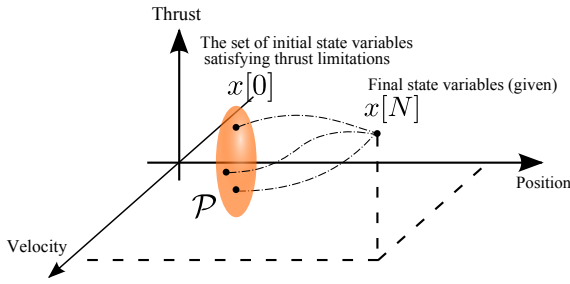


図1 初期状態変数集合の概念図  
Fig. 1. Concept of the set of initial state variables.

件について述べる。第2.1節において、推力制約を持つFSCにおける初期状態変数条件を導出する目的について述べる。第2.2節において、推力制約を持つFSCにおける初期状態変数条件を導出する。第2.3節において、第2.2節で求めた条件式に基づき解析を行った結果を示す。

〈2.1〉 推力制約を持つFSCにおける初期状態変数条件を導出する目的 本稿で求める初期状態変数集合の概念図をFig.1に示す。本稿の目的は、FSCにおいて推力制約が与えられ、終端状態  $x[N]$  が指定されているとき、推力制約を満たしつつ終端状態へもっていくことのできる初期状態変数  $x[0]$  の集合  $\mathcal{P}$  を求めることである。初期状態変数が  $\mathcal{P}$  に含まれるとき、FSCにより推力制約を満たしつつ、終端へもっていくことが約束されるため、 $\mathcal{P}$  を用いることで、ある時点における状態を指定した終端状態へ持つていけるかどうかを判定することが出来る。また、本稿で扱うプラントは式(1)で表される2次の剛体モデルであるとする。

$$P(s) = \frac{1}{Ms^2} \dots \dots \dots (1)$$

〈2.2〉 推力制約をもつFSCにおける初期状態変数条件の導出 本節では、推力制約を持つFSCにおける初期状態変数条件を導出する。まず、第2.2.1節において、FSCについて述べる。次に、第2.2.2節において、エネルギーを評価関数としたときの初期状態変数条件を導出する。最後に、第2.2.3節において、ジャークを評価関数としたときの初期状態変数条件を導出する。なお本稿では初期条件として、位置、速度、推力を考えるものとする。

〈2.2.1〉 終端状態制御<sup>(4)</sup> FSCとは、あるシステムに対し、FF入力を与えることで有限時間で指定した終端状態にもっていく制御法である。

ここで可制御な  $m$  次の離散時間システム

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}u[k], y[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k] \dots \dots \dots (2)$$

に対して、初期状態  $\mathbf{x}[0]$  を終端状態  $\mathbf{x}[N]$  に  $N$  ステップで到達させるFF制御入力  $u[k]$  を考える。制御入力に関する評価関数を式(3)のように設定し、これを最小化する  $u[k]$  を求める。

$$J = \mathbf{U}^T \mathbf{Q} \mathbf{U}, \mathbf{Q} > 0, \mathbf{U} = [u[0] \ u[1] \ \dots \ u[N-1]]^T (3)$$

ここで、 $\mathbf{U}$  は  $u[k]$  を縦に並べたベクトルであり、 $\mathbf{Q} \in R^{N \times N}$  は重み行列である。このとき、式(3)の評価関数を最小とするFF入力は式(4)で与えられる。

$$\mathbf{U} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{\Sigma}^T (\mathbf{\Sigma} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{\Sigma}^T)^{-1} (\mathbf{x}[N] - \mathbf{A}^N \mathbf{x}[0]) \dots \dots (4)$$

$$\mathbf{\Sigma} = [\mathbf{A}^{N-1} \mathbf{B} \ \mathbf{A}^{N-2} \mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{B}] \dots \dots \dots (5)$$

以下簡単のため  $u[i] = u_i$  と表すものとする。また、制御入力  $u_i$  ( $0 \leq i \leq N-1$ ) に関する制約を式(6)に示す。本研究では制御入力  $u_i$  ( $0 \leq i \leq N-1$ ) に式(6)の制約を考慮した初期状態変数条件を求める。

$$-u_{lim} \leq u_i \leq u_{lim} \dots \dots \dots (6)$$

ただし、 $u_{lim}$  は制御入力の上限值である。

〈2.2.2〉 エネルギーを評価関数としたときの初期状態変数条件の導出 アクチュエータの熱が制御系の性能を低下させてしまうようなアプリケーションの場合、消費エネルギーが最小となるような制御入力であることが望ましい。式(2)にFSCを適用すると、入力列  $\mathbf{U}$  は力の次元となるため、評価関数式(3)を最小化する  $\mathbf{U}$  を求めればよい。初期条件として、位置、速度、推力が与えられるとき、式(4)は式(7)と変形できる。

$$\mathbf{U}_d = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{\Sigma}_d^T (\mathbf{\Sigma}_d \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{\Sigma}_d^T)^{-1} (\mathbf{x}[N] - \mathbf{A}^N \mathbf{x}[0] - \mathbf{A}^{N-1} \mathbf{B} u[0]) (7)$$

$$\mathbf{\Sigma}_d = [\mathbf{A}^{N-2} \mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{B}] \dots \dots \dots (8)$$

式(1)で表されるプラントに対し、行列を要素に分解すると式(7)は式(9)で表すことが出来る。

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \\ \vdots & \vdots \\ q_{N-1,1} & q_{N-1,2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} X_F \\ V_F \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ V_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u_0 \right\} (9)$$

ただし、 $u_i$  ( $1 \leq i \leq N-1$ ) は入力列  $\mathbf{U}_d$  の  $i$  行における要素、 $q_{ij}$  ( $1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq 2$ ) は  $\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{\Sigma}_d^T (\mathbf{\Sigma}_d \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{\Sigma}_d^T)^{-1}$  の  $i$  行  $j$  列における要素、 $a_{ij}$  ( $1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2$ ) は  $\mathbf{A}^N$  の  $i$  行  $j$  列における要素、 $b_i$  ( $1 \leq i \leq 2$ ) は  $\mathbf{A}^{N-1} \mathbf{B}$  の  $i$  行における要素、 $X_F, V_F$  はそれぞれ終点の位置、速度、 $X_0, V_0, u_0$  はそれぞれ始点の位置、速度、推力を表す。各係数の導出は付録Aに示す。また、エネルギーを最小化するために、 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  とした。式(9)における右辺の各行は初期状態変数  $X_0, V_0, u_0$  を変数とする平面を表している。式(6),(9)より得られる  $2N$  枚の平面により囲まれる領域が、推力制約を持つ終端状態制御における初期状態変数条件を満たす領域である。

〈2.2.3〉 ジャークを評価関数としたときの初期状態変数条件の導出 ハードディスクドライブなど機械共振が問題となるアプリケーションの場合、機械共振や残留振動を抑えるためには、制御入力は急激に変化せず滑らかなことが望ましい。また第2.2.2節の手法では、終点における推力を指定できないが、本節の手法では指定できるという利点もある。そこでFig.2に示すように、制御対象  $P(s)$  の入

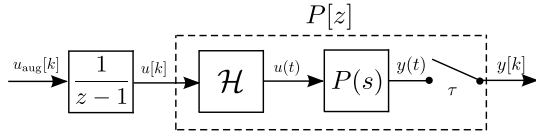


図2 Augmented system with an integrator.

力端に和分器  $1/(z-1)$  を接続した拡大系を構成し、ジャークを最小化することを考える。Fig.2 の拡大システム

$$\mathbf{x}_{\text{aug}}[k+1] = \mathbf{A}_{\text{aug}}\mathbf{x}_{\text{aug}}[k] + \mathbf{B}_{\text{aug}}u_{\text{aug}}[k], y[k] = \mathbf{C}_{\text{aug}}\mathbf{x}_{\text{aug}}[k] \quad (10)$$

に終端状態制御を適用すると、入力の時系列データ  $\mathbf{U}_{\text{aug}}$  は式 (11) で表される。

$$\mathbf{U}_{\text{aug}} = \mathbf{Q}^{-1}\Sigma_{\text{aug}}^T(\Sigma_{\text{aug}}\mathbf{Q}^{-1}\Sigma_{\text{aug}}^T)^{-1}(\mathbf{x}_{\text{aug}}[N] - \mathbf{A}_{\text{aug}}^N\mathbf{x}_{\text{aug}}[0]) \quad (11)$$

$$\Sigma_{\text{aug}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{aug}}^{N-1}\mathbf{B}_{\text{aug}} & \mathbf{A}_{\text{aug}}^{N-2}\mathbf{B}_{\text{aug}} & \cdots & \mathbf{B}_{\text{aug}} \end{bmatrix} \cdots \cdots \quad (12)$$

ジャークを最小化するような拡大系を用いているため、 $\mathbf{U}_{\text{aug}}$  は仮想的な入力  $u_{\text{aug}}[k]$  を縦に並べたベクトルであり、 $u_{\text{aug}}[k]$  はジャークに相当する次元の入力であることに注意する。それぞれの行列を要素に分解すると式 (11) は式 (13) で表すことができる。

$$\begin{bmatrix} u_{\text{aug}1} \\ u_{\text{aug}2} \\ \vdots \\ u_{\text{aug}N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{N1} & q_{N2} & q_{N3} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} X_F \\ V_F \\ u_F \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ V_0 \\ u_0 \end{bmatrix} \right\} \quad (13)$$

ただし、 $u_{\text{aug}i}$  ( $1 \leq i \leq N$ ) は入力列  $\mathbf{U}$  の  $i$  行における要素、 $q_{ij}$  ( $1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq 3$ ) は  $\mathbf{Q}^{-1}\Sigma_{\text{aug}}^T(\Sigma_{\text{aug}}\mathbf{Q}^{-1}\Sigma_{\text{aug}}^T)^{-1}$  の  $i$  行  $j$  列における要素、 $X_F, V_F, u_F$  はそれぞれ終点の位置、速度、推力、 $a_{ij}$  ( $1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3$ ) は  $\mathbf{A}_{\text{aug}}^N$  の  $i$  行  $j$  列における要素、 $X_0, V_0, u_0$  はそれぞれ始点の位置、速度、推力を表す。各係数の導出は付録 B に示す。また、ジャークを最小化するために、 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  とした。 $u_{\text{aug}i}$  はジャークに相当する次元の変数であるため、和分により制御入力  $u_i$  に変換する必要がある。制御入力  $u_i$  は初期推力  $u_0$  及びジャークに相当する次元の入力  $u_{\text{aug}i}$  を用いると、式 (14) で表される。

$$u_i = \begin{cases} u_0, & i = 0 \\ \sum_{k=1}^i u_{\text{aug}k} + u_0, & i \geq 1 \end{cases} \quad (14)$$

式 (6), (14) より、推力制約を考慮した初期状態変数の存在条件は式 (15) で表される。

$$-u_{\text{lim}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_{\text{aug}1} \\ \vdots \\ u_{\text{aug}N-1} \\ u_{\text{aug}N} \end{bmatrix} \leq u_{\text{lim}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

式 (15) における中辺の各行は初期状態変数  $X_0, V_0, u_0$  を変数とする平面を表している。式 (15) により張られる  $2N$  枚の平面に囲まれる領域が、推力制約をもつ終端状態制御における初期状態変数条件を満たす領域である。

## 〈2・3〉 初期状態変数の存在条件に関する解析

〈2・3・1〉 解析条件 モデルの質量は  $M = 6$ , サンプル周期は  $\tau = 0.0002$  s, 終点の状態変数は  $[X_F, V_F, u_F]^T = [0.4, 0.1, 0]^T$  とする。制御入力の上限値は  $u_{\text{lim}} = 5.0$  に設定した。プロット範囲は  $X_0$  軸方向は  $[0, 0.1]$ ,  $V_0$  軸方向は  $[0, 0.4]$ ,  $u_0$  軸方向は  $[-5, 5]$  とする。 $X_0$  軸,  $V_0$  軸,  $u_0$  軸のそれぞれの方向に対して、適当な間隔の格子点を考え、それぞれの点に対して式 (6), (9) または式 (15) を計算し、そのすべての条件式を満たす点をプロットした。ステップ数  $N$  は 100, 300, 500 の 3 通りで行った。

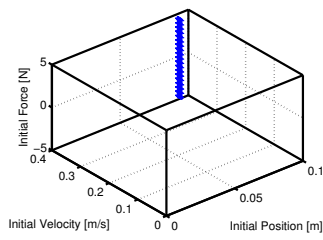
〈2・3・2〉 解析結果 式 (6), (9) を満たす点をプロットした結果を Fig.3-5 の (a), (b) に示す。また式 (15) を満たす点をプロットした結果を Fig.3-5 の (c), (d) に示す。(b), (d) はそれぞれ (a), (c) の領域における  $u_0 = 0$  での断面図である。Fig.3-5 はそれぞれステップ数  $N$  が 100, 300, 500 のときの解析結果である。Fig.3-5 よりエネルギーを最小化した場合もジャークを最小化した場合も、初期状態変数条件は時変な領域で与えられ、ステップ数が短くなるほど範囲が小さくなるのが分かる。

## 3. まとめ

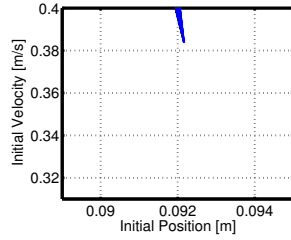
本稿では制御切り替えの新たな指標として、推力制約を持つ FSC における初期状態変数を提案した。FSC を MSC に適用する場合、推力制約を持つ FSC における初期状態変数条件を求める必要があったため、エネルギーを評価関数とした場合とジャークを評価関数とした場合の 2 つの場合において具体的に計算することでその条件を導出した。評価関数はアプリケーション毎に使い分ける必要があるが、特にジャークを評価関数とした場合、終点の推力が指定できるという利点もある。そして、解析により条件を満たす領域が時変な空間内に存在することを示した。その結果、終端状態制御をモード切り替え制御に適用できることを示した。

## 参考文献

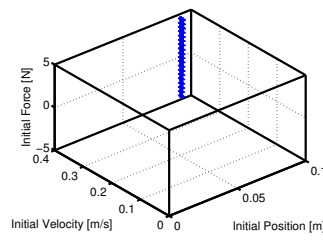
- (1) T. Yamaguchi, H. Soyama, H. Hosokawa, K. Tsuneta, H. Hirai, "Mode switching control design with initial value compensation and its application to head positioning control on magnetic disk drives," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 43, pp. 65-73, 1996
- (2) T. Yamaguchi, H. Soyama, H. Hosokawa, K. Tsuneta, H. Hirai, "Improvement of settling response of disk drive head positioning servo using mode switching control with initial value compensation," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 32, pp. 1767-1772, 1996
- (3) T. Yamaguchi, H. Numasato, H. Hirai, "A mode-switching control for motion control and its application to disk drives: design of optimal mode-switching conditions," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 3, pp. 202-209, 1998
- (4) T. Takayoshi, H. Nishimura, "Final-state control using compensation input," *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, vol. 30, pp. 253-260, 1994
- (5) M. Hirata, T. Hasegawa, K. Nonami, "Short Track-seeking Control of Hard Disk Drives by Using Final-state Control,"



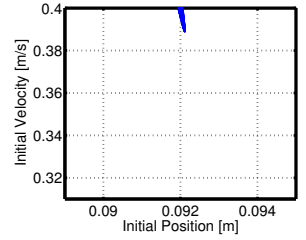
(a) Condition of initial state variables with energy minimization.



(b) 2D graph of Fig.3(a) at  $u_0 = 0$ .

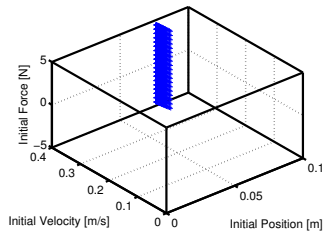


(c) Condition of initial state variables with jerk minimization.

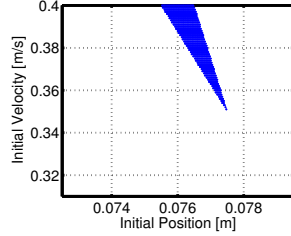


(d) 2D graph of Fig.3(c) at  $u_0 = 0$ .

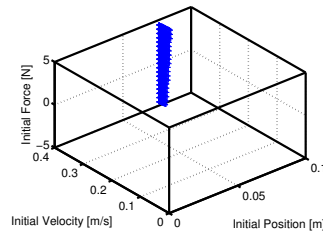
図3 初期状態変数条件 ( $N = 100$ )  
Fig. 3. Condition of initial state variables ( $N = 100$ ).



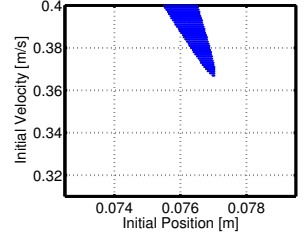
(a) Condition of initial state variables with energy minimization.



(b) 2D graph of Fig.4(a) at  $u_0 = 0$ .

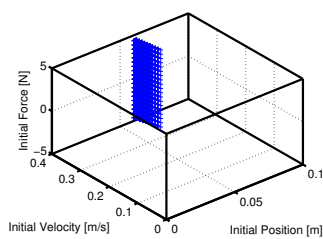


(c) Condition of initial state variables with jerk minimization.

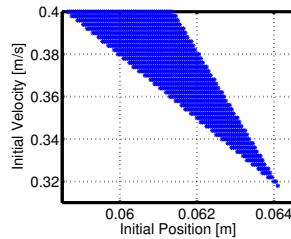


(d) 2D graph of Fig.4(c) at  $u_0 = 0$ .

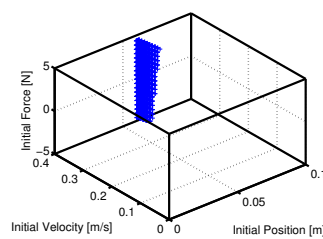
図4 初期状態変数条件 ( $N = 300$ )  
Fig. 4. Condition of initial state variables ( $N = 300$ ).



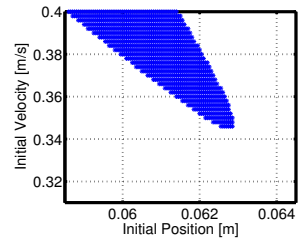
(a) Condition of initial state variables with energy minimization.



(b) 2D graph of Fig.5(a) at  $u_0 = 0$ .



(c) Condition of initial state variables with jerk minimization.



(d) 2D graph of Fig.5(c) at  $u_0 = 0$ .

図5 初期状態変数条件 ( $N = 500$ )  
Fig. 5. Condition of initial state variables ( $N = 500$ ).

- IEEE Trans Industry Applications*, vol. 125, pp. 524–529, 2005
- (6) M. Hirata, F. Ueno, “Final-State Control Using Polynomial and Time-Series Data,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 47, pp. 1944–1950, 2011
- (7) M. Hirata, F. Ueno, “Polynomial-input-type final-state control taking account of input saturation,” *Preprints of the 18th IFAC World Congress*, pp. 4061–4066, 2011
- (8) T. Yoshiura, S. Hara, “Proposal of updating final-state control and its application to a connection control problem,” *IEEE 13th*

*International Workshop on Advanced Motion Control (AMC)*, pp. 681–686, 2014

付 録

A. 式 (9) の係数の導出

微動ステージは式 (1) で表されるため、サンプリング周期を  $\tau$  とすると、離散時間状態空間表現式 (2) の係数  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  は式 (付 1) で表される。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\tau^2}{2M} & \frac{\tau}{M} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0] \dots \dots \dots \text{(付 1)}$$

初めに、式 (11) の  $\mathbf{Q}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^T(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{Q}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^T)^{-1}$  について考える。本論文ではエネルギーを最小化するため、 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  とする。 $\boldsymbol{\Sigma}$  は式 (8) で表されるため、 $\mathbf{A}^n$ ,  $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$  を計算する必要がある。 $\mathbf{A}^n$ ,  $\mathbf{A}^n\mathbf{B}$  及びその計算結果より  $a_{ij}$ ,  $b_j$  はそれぞれ式 (付 2) で表される。

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & n\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^n\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & n\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\tau^2}{2M} \\ \frac{\tau}{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tau^2}{M} \{\frac{1}{2} + n\} \\ \frac{\tau}{M} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^k|_{k=N}, \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^k\mathbf{B}|_{k=N-1} \dots \dots \dots \text{(付 2)}$$

よって、 $\boldsymbol{\Sigma}_d$  は式 (付 3) で表される。

$$\boldsymbol{\Sigma}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tau^2}{M} \{\frac{1}{2} + (N-2)\} & \dots & \frac{\tau^2}{M} \{\frac{1}{2} + (N-N)\} \\ \frac{\tau}{M} & \dots & \frac{\tau}{M} \end{bmatrix} \dots \dots \dots \text{(付 3)}$$

以上より、 $\boldsymbol{\Sigma}_d\boldsymbol{\Sigma}_d^T$  は式 (付 4) で与えられる。

$$\boldsymbol{\Sigma}_d\boldsymbol{\Sigma}_d^T = \begin{bmatrix} \frac{\tau^2}{M} \{\frac{1}{2} + (N-2)\} & \dots & \frac{\tau^2}{M} \{\frac{1}{2} + (N-N)\} \\ \frac{\tau}{M} & \dots & \frac{\tau}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\tau^2}{M} \{\frac{1}{2} + (N-2)\} & \frac{\tau}{M} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\tau^2}{M} \{\frac{1}{2} + (N-N)\} & \frac{\tau}{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tau^4}{M^2} \sum_{k=0}^{N-2} (k + \frac{1}{2})^2 & \frac{\tau^3}{M^2} \sum_{k=0}^{N-2} (k + \frac{1}{2}) \\ \frac{\tau^3}{M^2} \sum_{k=0}^{N-2} (k + \frac{1}{2}) & \frac{\tau^2}{M^2} (N-1) \end{bmatrix} \dots \dots \dots \text{(付 4)}$$

次に、 $(\boldsymbol{\Sigma}_d\boldsymbol{\Sigma}_d^T)^{-1}$  を求めるために、行列式  $|\boldsymbol{\Sigma}_d\boldsymbol{\Sigma}_d^T|$  及び余因子行列  $\text{adj}(\boldsymbol{\Sigma}_d\boldsymbol{\Sigma}_d^T)$  を計算する。行列式  $|\boldsymbol{\Sigma}_d\boldsymbol{\Sigma}_d^T|$  及び余因子行列  $\text{adj}(\boldsymbol{\Sigma}_d\boldsymbol{\Sigma}_d^T)$  をそれぞれ式 (付 5) に示す。

$$|\boldsymbol{\Sigma}_d\boldsymbol{\Sigma}_d^T| = \frac{\tau^6}{M^4} \left[ \sum_{k=0}^{N-2} (k + \frac{1}{2})^2 (N+1) - \left\{ \sum_{k=0}^{N-2} (k + \frac{1}{2}) \right\}^2 \right], \quad \text{adj}(\boldsymbol{\Sigma}_d\boldsymbol{\Sigma}_d^T) = \begin{bmatrix} \frac{\tau^2}{M^2} (N-1) & -\frac{\tau^3}{M^2} \sum_{k=0}^{N-2} (k + \frac{1}{2}) \\ -\frac{\tau^3}{M^2} \sum_{k=0}^{N-2} (k + \frac{1}{2}) & \frac{\tau^4}{M^2} \sum_{k=0}^{N-2} (k + \frac{1}{2})^2 \end{bmatrix} \dots \dots \dots \text{(付 5)}$$

最後に、 $\boldsymbol{\Sigma}_d^T(\boldsymbol{\Sigma}_d\boldsymbol{\Sigma}_d^T)^{-1}$  を求める。 $\boldsymbol{\Sigma}_d^T(\boldsymbol{\Sigma}_d\boldsymbol{\Sigma}_d^T)^{-1}$  を式 (付 6) に示す。

$$\boldsymbol{\Sigma}_d^T(\boldsymbol{\Sigma}_d\boldsymbol{\Sigma}_d^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\tau^2}{M} \{\frac{1}{2} + (N-2)\} & \frac{\tau}{M} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\tau^2}{M} \{\frac{1}{2} + (N-N)\} & \frac{\tau}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\tau^2}{M^2} (N-1) & -\frac{\tau^3}{M^2} \sum_{k=0}^{N-2} (k + \frac{1}{2}) \\ -\frac{\tau^3}{M^2} \sum_{k=0}^{N-2} (k + \frac{1}{2}) & \frac{\tau^4}{M^2} \sum_{k=0}^{N-2} (k + \frac{1}{2})^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{M^4}{\tau^6} \frac{1}{\left[ \sum_{k=0}^{N-2} (k + \frac{1}{2})^2 (N+1) - \left\{ \sum_{k=0}^{N-2} (k + \frac{1}{2}) \right\}^2 \right]} \text{(付 6)}$$

自然数の 1 乗和, 2 乗和, 3 乗和, 4 乗和はそれぞれ式 (付 7) で表される。

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2, \quad \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \dots \dots \dots \text{(付 7)}$$

式 (付 7) を式 (付 6) に代入し、整理すると式 (付 8) が得られる。

$$q_{i1} = \frac{6M}{\tau^2(N-2)(N-1)} (N-2i+2) \dots \dots \dots \text{(付 8)}$$

$$q_{i2} = \frac{M}{\tau(N-2)(N-1)N} \{-2N^2 + (-5+6i)N + (6-6i)\}$$

B. 式 (13) の係数の導出

拡大系の状態空間表現式 (10) の係数  $\mathbf{A}_{\text{aug}}$ ,  $\mathbf{B}_{\text{aug}}$ ,  $\mathbf{C}_{\text{aug}}$  は式 (付 9) で表される。

$$\mathbf{A}_{\text{aug}} = \begin{bmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2M} \\ 0 & 1 & \frac{\tau}{M} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\text{aug}} = [0 \ 0 \ 1]^T, \quad \mathbf{C}_{\text{aug}} = [1 \ 0 \ 0] \dots \dots \dots \text{(付 9)}$$

初めに、式 (11) の  $\mathbf{Q}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\text{aug}}^T(\boldsymbol{\Sigma}_{\text{aug}}\mathbf{Q}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\text{aug}}^T)^{-1}$  について考える。本論文ではジャークを最小化するため、 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  とする。 $\boldsymbol{\Sigma}_{\text{aug}}$  は式 (12) で表されるため、 $\mathbf{A}_{\text{aug}}^n$ ,  $\mathbf{A}_{\text{aug}}^n\mathbf{B}_{\text{aug}}$  を計算する必要がある。 $\mathbf{A}_{\text{aug}}^n$ ,  $\mathbf{A}_{\text{aug}}^n\mathbf{B}_{\text{aug}}$  は式 (付 10) で表される。

$$\mathbf{A}_{\text{aug}}^n = \begin{bmatrix} 1 & n\tau & \frac{n^2\tau^2}{2M} \\ 0 & 1 & \frac{n\tau}{M} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{\text{aug}}^n \mathbf{B}_{\text{aug}} = \begin{bmatrix} 1 & n\tau & \frac{n^2\tau^2}{2M} \\ 0 & 1 & \frac{n\tau}{M} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n^2\tau^2}{2M} \\ \frac{n\tau}{M} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\text{aug}}^k|_{k=N} \dots \dots \dots (付 10)$$

よって、 $\Sigma_{\text{aug}}$  は式 (付 11) で表される。

$$\Sigma_{\text{aug}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{aug}}^{N-1} \mathbf{B}_{\text{aug}} & \mathbf{A}_{\text{aug}}^{N-2} \mathbf{B}_{\text{aug}} & \dots & \mathbf{B}_{\text{aug}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(N-1)^2\tau^2}{2M} & \frac{(N-2)^2\tau^2}{2M} & \dots & 0 \\ \frac{(N-1)\tau}{M} & \frac{(N-2)\tau}{M} & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (付 11)$$

以上より、 $\Sigma_{\text{aug}} \Sigma_{\text{aug}}^T$  は式 (付 12) で与えられる。

$$\Sigma_{\text{aug}} \Sigma_{\text{aug}}^T = \begin{bmatrix} \frac{(N-1)^2\tau^2}{2M} & \frac{(N-2)^2\tau^2}{2M} & \dots & 0 \\ \frac{(N-1)\tau}{M} & \frac{(N-2)\tau}{M} & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(N-1)^2\tau^2}{2M} & \frac{(N-1)\tau}{M} & 1 \\ \frac{(N-2)^2\tau^2}{2M} & \frac{(N-2)\tau}{M} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tau^4}{4M^2} \sum_{k=0}^{N-1} k^4 & \frac{\tau^3}{2M^2} \sum_{k=0}^{N-1} k^3 & \frac{\tau^2}{2M} \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \\ \frac{\tau^3}{2M^2} \sum_{k=0}^{N-1} k^3 & \frac{\tau^2}{M^2} \sum_{k=0}^{N-1} k^2 & \frac{\tau}{M} \sum_{k=0}^{N-1} k \\ \frac{\tau^2}{2M} \sum_{k=0}^{N-1} k^2 & \frac{\tau}{M} \sum_{k=0}^{N-1} k & N \end{bmatrix} \dots \dots \dots (付 12)$$

次に、 $(\Sigma_{\text{aug}} \Sigma_{\text{aug}}^T)^{-1}$  を求めるために、行列式  $|\Sigma_{\text{aug}} \Sigma_{\text{aug}}^T|$  及び余因子行列  $\text{adj}(\Sigma_{\text{aug}} \Sigma_{\text{aug}}^T)$  を計算する。行列式  $|\Sigma_{\text{aug}} \Sigma_{\text{aug}}^T|$  及び余因子行列  $\text{adj}(\Sigma_{\text{aug}} \Sigma_{\text{aug}}^T)$  をそれぞれ式 (付 13), (付 14) に示す。

$$|\Sigma_{\text{aug}} \Sigma_{\text{aug}}^T| = \frac{\tau^6}{4M^4} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \sum_{k=0}^{N-1} k^4 \cdot N + 2 \sum_{k=0}^{N-1} k \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \sum_{k=0}^{N-1} k^3 - \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \right)^3 - \left( \sum_{k=0}^{N-1} k \right)^2 \sum_{k=0}^{N-1} k^4 - \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^3 \right)^2 \cdot N \right\} \dots \dots \dots (付 13)$$

$$\text{adj}(\Sigma_{\text{aug}} \Sigma_{\text{aug}}^T) = \begin{bmatrix} \frac{\tau^2}{M^2} \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \cdot N - \left( \sum_{k=0}^{N-1} k \right)^2 \right) & -\frac{\tau^3}{2M^2} \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^3 \cdot N - \sum_{k=0}^{N-1} k \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \right) & \frac{\tau^3}{M^4} \left( \sum_{k=0}^{N-1} k \sum_{k=0}^{N-1} k^3 - \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \right)^2 \right) \\ -\frac{\tau^3}{2M^2} \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^3 \cdot N - \sum_{k=0}^{N-1} k \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \right) & \frac{\tau^4}{4M^2} \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^4 \cdot N - \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \right)^2 \right) & -\frac{\tau^5}{4M^3} \left( \sum_{k=0}^{N-1} k \sum_{k=0}^{N-1} k^4 - \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \sum_{k=0}^{N-1} k^3 \right) \\ \frac{\tau^2}{M^2} \left( \sum_{k=0}^{N-1} k \sum_{k=0}^{N-1} k^3 - \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \right)^2 \right) & -\frac{\tau^5}{4M^3} \left( \sum_{k=0}^{N-1} k \sum_{k=0}^{N-1} k^4 - \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \sum_{k=0}^{N-1} k^3 \right) & \frac{\tau^6}{4M^4} \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \sum_{k=0}^{N-1} k^4 - \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^3 \right)^2 \right) \end{bmatrix} (付 14)$$

最後に、 $\Sigma_{\text{aug}}^T (\Sigma_{\text{aug}} \Sigma_{\text{aug}}^T)^{-1}$  を求める。 $\Sigma_{\text{aug}}^T (\Sigma_{\text{aug}} \Sigma_{\text{aug}}^T)^{-1}$  を式 (付 15) に示す。

$$\Sigma_{\text{aug}}^T (\Sigma_{\text{aug}} \Sigma_{\text{aug}}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(N-1)^2\tau^2}{2M} & \frac{(N-1)\tau}{M} & 1 \\ \frac{(N-2)^2\tau^2}{2M} & \frac{(N-2)\tau}{M} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{4M^4}{\tau^6} \frac{1}{\left\{ \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \sum_{k=0}^{N-1} k^4 \cdot N + 2 \sum_{k=0}^{N-1} k \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \sum_{k=0}^{N-1} k^3 - \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \right)^3 - \left( \sum_{k=0}^{N-1} k \right)^2 \sum_{k=0}^{N-1} k^4 - \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^3 \right)^2 \cdot N \right\}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\tau^2}{M^2} \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \cdot N - \left( \sum_{k=0}^{N-1} k \right)^2 \right) & -\frac{\tau^3}{2M^2} \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^3 \cdot N - \sum_{k=0}^{N-1} k \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \right) & \frac{\tau^3}{M^4} \left( \sum_{k=0}^{N-1} k \sum_{k=0}^{N-1} k^3 - \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \right)^2 \right) \\ -\frac{\tau^3}{2M^2} \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^3 \cdot N - \sum_{k=0}^{N-1} k \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \right) & \frac{\tau^4}{4M^2} \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^4 \cdot N - \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \right)^2 \right) & -\frac{\tau^5}{4M^3} \left( \sum_{k=0}^{N-1} k \sum_{k=0}^{N-1} k^4 - \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \sum_{k=0}^{N-1} k^3 \right) \\ \frac{\tau^2}{M^2} \left( \sum_{k=0}^{N-1} k \sum_{k=0}^{N-1} k^3 - \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \right)^2 \right) & -\frac{\tau^5}{4M^3} \left( \sum_{k=0}^{N-1} k \sum_{k=0}^{N-1} k^4 - \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \sum_{k=0}^{N-1} k^3 \right) & \frac{\tau^6}{4M^4} \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \sum_{k=0}^{N-1} k^4 - \left( \sum_{k=0}^{N-1} k^3 \right)^2 \right) \end{bmatrix} (付 15)$$

式 (付 7) を式 (付 15) に代入し、整理すると式 (付 16) が得られる。

$$\begin{aligned} q_{i1} &= \frac{M}{\tau^2(N-2)(N-1)N(N+1)(N+2)} \{360(N-i)^2 + 360(N-1)(N-i) - 60(N-2)(N-1)\} \\ q_{i2} &= \frac{M}{\tau(N-2)(N-1)N(N+1)(N+2)} \{180(N-1)(N-i)^2 - 12(2N-1)(8N-11)(N-i) + 18(N-1)(2N-1)\} \dots \dots \dots (付 16) \\ q_{i3} &= \frac{-1}{N(N+1)(N+2)} \{30(N-i)^2 - 18(2N-1)(N-i) + 3(3N^2 - 3N + 2)\} \end{aligned}$$